

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к заданиям по дисциплине «Теория математической  
обработки геодезических измерений» на тему:

**Уравнивание нивелирных сетей параметрическим способом**  
для студентов 2-го курса очного и заочного по специальности 21.05. 01 «При-  
кладная геодезия» и направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанци-  
онное зондирование»

Ростов-на-Дону  
2018

УДК 528.1  
ББК 26.104

Методические указания по дисциплине "Теория математической обработки геодезических измерений". Уравнивание нивелирных сетей параметрическим способом / для студентов 2-го курса очного и заочного по специальности «Прикладная геодезия» и направлению подготовки 120401 «Геодезия и дистанционное зондирование».- Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т, 2014.- 20 с.

В методических указаниях даны основы уравнивания геодезических сетей параметрическим способом. Приведена схема решения нормальных уравнений с использованием алгоритма Гаусса. Рассмотрен пример обработки нивелирной сети по методу наименьших квадратов. Разработаны варианты индивидуальных заданий для студентов.

УДК 528.1

Составители: к.т.н., доцент Губеладзе А.Р.  
инженер Губеладзе И.О.

## 1. Задачи и методы уравнивания

$$[p_{vv}] = \min, \quad (1)$$

$\nu$  - поправки в измеренные значения.

Реализация метода наименьших квадратов позволяет решить следующие задачи:

- 1) исключается неопределенность решения, связанная с избыточным числом измерений;
- 2) повышается точность и надежность получаемых результатов за счет оптимального использования всех измерений;
- 3) выполняется оценка точности результатов измерений и полученных значений, также функций от них.

Строгое уравнивание может быть реализовано либо параметрическим, либо коррелятным способами или их разновидностями.

Обязательным условием уравнивания является возможность функционально выразить все измеренные величины через уравниваемые параметры.

В геодезической практике встречаются случаи, когда необходимо определить некоторые величины косвенным путем, причем эти величины должны быть связаны с измеряемыми функциональными зависимостями.

## 2. Основы метода параметрического уравнивания

Предположим нам известны результаты измерений  $n$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Требуется определить надежные значения  $k$  величин  $T_1, T_2, \dots, T_k$ , которые связаны с уравненными значениями  $X_1, X_2, \dots, X_k$  измеренных величин определенными функциональными зависимостями:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1(T_1, T_2, \dots, T_k); \\ X_2 &= F_2(T_1, T_2, \dots, T_k); \\ &\dots\dots\dots \\ X_n &= F_n(T_1, T_2, \dots, T_k). \end{aligned} \tag{2}$$



$$\frac{\partial F_i}{\partial t_1} = a_i; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t_2} = b_i; \dots; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t_k} = g_i; \quad F_i(t_1, t_2, \dots, t_k) - x_i = l_i.$$
[illegible]

## Определение коэффициентов нормальных уравнений

№ уравнения	$a]$	$b]$	$\dots$	$g]$	$l]$	$s]$	$p$	$v$	$pv$	$pvv$	$plv$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$a_1$	$b_1$	$\dots$	$g_1$	$l_1$	$s_1$	$p_1$	$v_1$	$p_1v_1$	$p_1v_1v_1$	$p_1l_1v_1$
2	$a_2$	$b_2$	$\dots$	$g_2$	$l_2$	$s_2$	$p_2$	$v_2$	$p_2v_2$	$p_2v_2v_2$	$p_2l_2v_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n$	$a_n$	$b_n$	$\dots$	$g_n$	$l_n$	$s_n$	$p_n$	$v_n$	$p_nv_n$	$p_nv_nv_n$	$p_nl_nv_n$
Суммы	$[a]$	$[b]$	$\dots$	$[g]$	$[l]$	$[s]$		$[v]$	$[pv]$	$[pvv]$	$[plv]$
Неизвест.	$\delta t_1$	$\delta t_2$	$\dots$	$\delta t_k$							
$[pa$	$[paa]$	$[pab]$	$\dots$	$[pag]$	$[pal]$	$[pas]$					
$[pb$		$[pbb]$	$\dots$	$[pbg]$	$[pbl]$	$[pbs]$					
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$					
$[pg$				$[pgg]$	$[pgl]$	$[pgs]$					
$[pl$					$[pll]$	$[pls]$					
$[ps$						$[pss]$					

$$\begin{aligned}
 & [pa\alpha]\delta t_1 + [pa\beta]\delta t_2 + ... + [pag]\delta t_k + [pal] = 0; \\
 & [pab]\delta t_1 + [pb\beta]\delta t_2 + ... + [pbs]\delta t_k + [pbl] = 0; \\
 & ..... \\
 & [pg\alpha]\delta t_1 + [pg\beta]\delta t_2 + ... + [pgg]\delta t_k + [vgl] = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$
$$a_i + b_i + \dots + g_i + l_i = s_i, \quad (11)$$

а в нижней части данной таблицы



# Схема решения нормальных уравнений Гаусса-Дулитля

Таблица 2

$\delta t_1$	$\delta t_2$	$\delta t_3$	$l$	$s$	Контроль
1	2	3	4	5	6
$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pal]$	$[pas]$	$\Sigma_1$
-1	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$	$-\frac{[pal]}{[paa]}$	$-\frac{[pas]}{[paa]}$	$-\frac{\Sigma_1}{[paa]}$
	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbl]$	$[pbs]$	$\Sigma_2$
	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pac]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pas]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}\Sigma_1$
	$[pbb \cdot 1]$	$[pbc \cdot 1]$	$[pbl \cdot 1]$	$[pbs \cdot 1]$	$[\Sigma_2 \cdot 1]$
	-1	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbs \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[\Sigma_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$
		$[pcc]$	$[pcl]$	$[pcs]$	$\Sigma_3$
		$-\frac{[pac]}{[paa]}[pac]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}[pas]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}\Sigma_1$
		$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbc \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbl \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbs \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[\Sigma_2 \cdot 1]$
		$[pcc \cdot 2]$	$[pcl \cdot 2]$	$[pcs \cdot 2]$	$[\Sigma_3 \cdot 2]$
		-1	$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[pcs \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[\Sigma_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$
	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$[pll]$	$[pls]$	
$-\frac{[pac]}{[paa]}\delta t_3$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}\delta t_3$	$\delta t_3$	$-\frac{[pal]}{[paa]}[pal]$	$-\frac{[pal]}{[paa]}[pas]$	
$-\frac{[pab]}{[paa]}\delta t_2$	$\delta t_2$		$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbl \cdot 1]$	$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbs \cdot 1]$	
$\delta t_1$			$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}[pcl \cdot 2]$	$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}[pcs \cdot 2]$	
			$[pll \cdot 3]$	$[pls \cdot 3]$	

## 3. Оценка точности в параметрическом способе уравнивания

Оценку точности можно решить в процессе выполнения уравнивательных вычислений, определяя средние квадратические ошибки измеренных и уравниваемых значений, в том числе и функций от этих величин.

Согласно теории ошибок измерений среднюю квадратическую ошибку какой-либо величины в общем случае определяем по формуле

$$M_Y = \frac{\mu}{\sqrt{P_Y}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_Y}}, \quad (16)$$

где  $M_y$  – средняя квадратическая ошибка оцениваемой величины;

$\mu$  – ошибка единицы веса;

$P_y$  – вес оцениваемой величины.

На начальной стадии уравнивания произвольно принимается ошибка единицы веса  $\mu_0$  в зависимости от вида работ, которая позволяет установить веса измеряемых величин.

В результате уравнительных вычислений определяют фактическое значение ошибки единицы веса по найденным поправкам  $v_i$  согласно формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}, \quad (17)$$

Где  $n$  – количество всех выполненных измерений;

$k$  – число независимых неизвестных.

Средняя квадратическая ошибка уравненных параметров вычисляется по формуле

$$m_j = \mu \sqrt{\frac{1}{p_i}} = \mu \sqrt{Q_{jj}}, \quad (18)$$

где  $Q_{jj}$  – весовые коэффициенты, которые определяются из следующих систем нормальных уравнений в схеме решения Гаусса (табл.3):

1-ая система

$$\begin{aligned}
 & [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + ... + [pag]Q_{lk} = 1; \\
 & [pab]Q_{11} + [pb b]Q_{12} + ... + [pbg]Q_{l3} = 0; \\
 & ..... \\
 & [pag]Q_{11} + [pbg]Q_{12} + ... + [pgg]Q_{lk} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

2-ая система

$$\begin{aligned}
& [paa]Q_{21} + [pab]Q_{22} + \dots + [pag]Q_{2k} = 0; \\
& [pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + \dots + [pbg]Q_{2k} = 1; \\
& ..... \\
& [pag]Q_{21} + [pbg]Q_{22} + \dots + [pgg]Q_{2k} = 0;
\end{aligned} \tag{20}$$

 $k$ -ая система

[illegible]

Контролем симметричности весовых коэффициентов является равенство  
Вычисление весовых коэффициентов и обратного веса функции



$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$f$	$\Sigma_u$
7	8	9	10	11
$[pal]_1 = -1$	$[pal]_2 = 0$	$[pal]_3 = 0$	$f_1$	$\Sigma u_1$
$-\frac{[pal]_1}{[paa]}$	$-\frac{[pal]_2}{[paa]}$	$-\frac{[pal]_3}{[paa]}$	$-\frac{f_1}{[paa]}$	$-\frac{\Sigma u_1}{[paa]}$
$[pbl]_1 = 0$	$[pbl]_2 = -1$	$[pbl]_3 = 0$	$f_2$	$\Sigma u_2$
$-\frac{[pab]}{[paa]} [pal]_1$	$-\frac{[pab]}{[paa]} [pal]_2$	$-\frac{[pab]}{[paa]} [pal]_3$	$-\frac{[pab]}{[paa]} f_1$	$-\frac{[pab]}{[paa]}$
$[pbl \cdot 1]_1$	$[pbl \cdot 1]_2$	$[pbl \cdot 1]_3$	$[f_2 \cdot 1]$	$[\Sigma u_2 \cdot 1]$
$-\frac{[pbl \cdot 1]_1}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_2}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_3}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[\Sigma u_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$
$[pcl]_1$	$[pcl]_2$	$[pcl]_3$	$f_3$	$\Sigma u_3$
$-\frac{[pac]}{[paa]} [pal]_1$	$-\frac{[pac]}{[paa]} [pal]_2$	$-\frac{[pac]}{[paa]} [pal]_3$	$-\frac{[pac]}{[paa]} f_1$	$-\frac{[pac]}{[paa]} \Sigma u_1$
$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pbl \cdot 1]_1$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pbl \cdot 1]_2$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pbl \cdot 1]_3$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \Sigma u_2 \cdot 1$
$[pcl \cdot 2]_1$	$[pcl \cdot 2]_2$	$[pcl \cdot 2]_3$	$[f_3 \cdot 2]$	$[\Sigma u_3 \cdot 2]$
$-\frac{[pcl \cdot 2]_1}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_2}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_3}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[\Sigma u_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$
$-\frac{[pal]_1}{[paa]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_1}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_1}{[pcc \cdot 2]}$	0	$[f]$
$-\frac{[pac]}{[paa]} Q_{13}$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} Q_{13}$	$Q_{13}$	$-\frac{f_1}{[paa]} f_1$	$-\frac{f_1}{[paa]} \Sigma u_1$
$-\frac{[pab]}{[paa]} Q_{12}$	$Q_{12}$		$-\frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]$	$-\frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [\Sigma u_2 \cdot 1]$
$Q_{11}$			$-\frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} [f_3 \cdot 2]$	$-\frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} [\Sigma u_3 \cdot 2]$
$-\frac{[pal]_2}{[paa]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_2}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_2}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{1}{P_u}$	$-\frac{1}{P_u}$
$-\frac{[pac]}{[paa]} Q_{23}$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} Q_{23}$	$Q_{23}$		
$-\frac{[pab]}{[paa]} Q_{22}$	$Q_{22}$			
$Q_{21}$				

Окончание табл. 3

7	8	9	10	11
---	---	---	----	----





мерений; вычислить среднюю квадратическую ошибку уравнированного 5-го превышения.

Порядок вычислений:

1. В качестве неизвестных значений примем отметки узловых реперов  $P_n 1$ ,  $P_n 2$  и  $P_n 3$ . Обозначим искомые величины соответственно через  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , которые представим в следующем виде

$$T_j = t_j + \delta t_j, \quad (31)$$

где  $t_j$  – приближенные значения;

$\delta t_j$  – поправки в приближенные значения;

$$t_1 = H_A + h_1 = 200,106 + 6,135 = 206,241 \text{ м};$$

$$t_2 = H_B + h_3 = 208,953 + 5,614 = 214,567 \text{ м};$$

$$t_3 = H_C + h_6 = 208,480 - 0,930 = 207,550 \text{ м};$$

2. Составим уравнения поправок, заменяя согласно (5) и (7) уравниваемые значения превышений измеренными, а определяемые неизвестные их приближенными значениями и поправками к ним:

$$h_1 + v_1 = t_1 + \delta t_1 - H_A;$$

$$h_2 + v_2 = t_2 + \delta t_2 - t_1 - \delta t_1;$$

$$h_3 + v_3 = t_2 + \delta t_2 - H_B;$$

$$h_4 + v_4 = t_3 + \delta t_3 - t_1 - \delta t_1;$$

$$h_5 + v_5 = t_3 + \delta t_3 - t_2 - \delta t_2;$$

$$h_6 + v_6 = t_3 + \delta t_3 - H_C;$$

$$h_6 + v_6 = t_2 + \delta t_2 - H_C$$

и, подставив численные значения

$$206,241 + \delta t_1 - 200,106 - 6,135 = v_1;$$

$$214,567 + \delta t_2 - 206,241 - 8,343 - \delta t_1 = v_2;$$

$$214,567 + \delta t_2 - 208,953 - 5,614 = v_3;$$

$$207,550 + \delta t_3 - 206,241 - \delta t_1 - 1,394 = v_4;$$

$$207,550 + \delta t_3 - 214,567 - \delta t_2 + 6,969 = v_5;$$

$$207,550 + \delta t_3 - 208,480 + 0,830 = v_6;$$

$$214,567 + \delta t_2 - 208,480 - 6,078 = v_7,$$

в результате получим систему уравнений поправок:

$$+ \delta t_1 \quad \quad \quad = v_1;$$

$$- \delta t_1 + \delta t_2 \quad \quad - 1,7 \text{ см} = v_2;$$

$$+ \delta t_2 \quad \quad \quad = v_3;$$

$$- \delta t_1 \quad \quad + \delta t_3 - 8,5 \text{ см} = v_4;$$

$$- \delta t_2 + \delta t_3 - 4,8 \text{ см} = v_5;$$

$$+ \delta t_3 \quad \quad \quad = v_6;$$

$$+ \delta t_2 \quad \quad + 0,9 \text{ см} = v_7.$$

3. Вычислим веса измеренных превышений согласно следующему соотношению

$$p_i = \frac{C}{L_i} = \frac{10}{L_i}.$$

4. Вычислим коэффициенты нормальных уравнений (табл. 5). В результате получим следующие нормальные уравнения

$$\begin{aligned} 1,06 \delta t_1 - 0,35 \delta t_2 - 0,36 \delta t_3 + 3,65 &= 0; \\ - 0,35 \delta t_1 + 1,45 \delta t_2 - 0,40 \delta t_3 + 1,61 &= 0; \\ - 0,36 \delta t_1 - 0,40 \delta t_2 + 1,17 \delta t_3 - 4,96 &= 0. \end{aligned}$$

Найдем суммарное уравнение

$$0,35 \delta t_1 + 0,70 \delta t_2 + 0,41 \delta t_3 + 0,30 = 0.$$

Вычисление коэффициентов нормальных уравнений

Таблица 5

№ уравнения	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	$p$	$v$ , см	$pvv$	$plv$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1				+1,0	0,353	-2,68	2,535	
2	-1	+1		-1,7	-1,7	0,344	+0,08	0,002	-0,047
3		+1			+1,0	0,379	-0,90	0,307	
4	-1		+1	-8,5	-8,5	0,361	-2,71	2,651	8,316
5		-1	+1	-4,8	-4,8	0,395	-0,79	0,247	1,498
6			+1		+1,0	0,413	+3,11	3,995	
7		+1		+0,9	+1,9	0,328	0	0	
Суммы	-1	+2	+3	-14,1	-10,1			9,737	9,767
Неизвест.	-2,68	-0,90	3,11						
$[pa$	1,06	-0,35	-0,36	3,65	4,00				
$[pb$		1,45	-0,40	1,61	2,31				
$[pc$			1,17	-4,96	-4,55				
$[pl$				36,44	36,74				
$[ps$					38,50				

5. Решение нормальных уравнений произведено в табл. 6 согласно схеме Гаусса. Для контроля правильности вычисленных неизвестных  $\delta t_1$ ,  $\delta t_2$  и  $\delta t_3$  подставим их вычисленные значения в суммарное уравнение

$$0,35 (-2,687) + 0,70 (-0,903) + 0,41 (3,103) + 0,30 = 0.$$

6. В правой части табл. 5 вычисляем поправки (графа 8) согласно равенствам

$$v_i = a_i \delta t_1 + b_i \delta t_2 + c_i \delta t_3 + l_i.$$

Произведем контроль по  $[pvv]$ . Полученные значения сумм в графах 9 и 10 должны сходиться.

# Решение нормальных уравнений

Таблица 6

№ строк	$\delta t_1$	$\delta t_2$	$\delta t_3$	$L$	$S$	Контроль	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$\Sigma'$	$f_i$	$\Sigma_U$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,06	-0,35	-0,36	3,65	4,00	4,00	-1			3,00		0,35
2	-1	0,3302	0,3396	-3,4434	-3,7736	-3,7736	0,9434			-2,8302		-0,3302
3												
4		1,45	-0,40	1,61	2,31	2,31		-1,000		1,31	-1,000	-0,30
5		-0,116	-0,119	1,205	1,321		-0,330			-0,991		0,116
6		1,334	-0,519	2,215	3,631	3,630	-0,330	-1,000		2,301	-1,000	-0,184
7		-1	0,3890	-2,1102	-2,7219	-2,7211	0,2474	0,7496		-1,7249	0,7496	0,1379
8												
9			1,17	-4,96	-4,55	-4,55			-1,000	-5,55	1,000	1,41
10			-0,122	1,240	1,358		-0,340			1,019		0,119
11			-0,202	1,095	1,413		-0,128	-0,389		0,895	-0,389	-0,072
12			0,846	-2,625	-1,779	-1,779	-0,468	-0,389	-1,000	1,914	0,611	1,457
13			-1	3,1028	2,1028	2,1028	0,553	0,460	1,182	-2,262	-0,722	-1,722
14												
15	-3,443	-2,110	3,103	36,440	36,740		0,943	0,247	0,553			
16	1,054	1,207	$\delta t_3$	-12,568	-13,774		0,188	0,215	$Q_{13}$			
17	-0,298	-0,903		-5,940	-7,662		0,152	0,462			-0,750	-0,138
18	-2,687	$\delta t_3$		-8,145	-5,520		1,283	$Q_{12}$			-0,441	-1,052
19	$\delta t_1$		$[p_{vv}] =$	9,787	9,784		$Q_{11}$			$-\frac{1}{P_U} =$	-1,191	-1,190
20								0,750	0,460			
21							0,156	0,179	$Q_{23}$			
22							0,307	0,929				
23							0,463	$Q_{22}$				
24							$Q_{21}$					
25							0,401		1,182			
26							0,152	0,460	$Q_{33}$			
27							0,553	$Q_{32}$				
28							$Q_3$					

7. Вычислим уравненные значения превышений (табл. 7)

Уравненные значения превышений

Таблица 7

№ ходов	Измеренные Превышения $h_i$ , м	Поправки $v_i$ , мм	Уравненные превышения $h_i'$ , м
1	2	3	4
1	+6,135	-26,8	+6,1082
2	+8,343	+0,8	+8,3438
3	+5,614	-9,0	+5,6050
4	+1,394	-27,1	+1,3669
5	-6,969	-7,9	-6,9769
6	-0,930	+31,1	-0,8989
7	+6,078	0	+6,0780

7. Определим отметки искоемых реперов  $Pn$  1,  $Pn$  2 и  $Pn$  3:

$$H_1 = H_A + h'_1 = 200,1060 + 6,1082 = 206,2142 \text{ м};$$

$$H_2 = H_B + h'_3 = 208,9530 + 5,6050 = 214,5580 \text{ м};$$

$$H_3 = H_C + h'_6 = 208,4800 - 0,8989 = 207,5811 \text{ м}.$$

8. Произведем окончательный контроль:

$$H_B = H_A + h'_1 + h'_2 - h'_3 = 200,1060 + 6,1082 + 8,3438 - 5,6050 = 208,9530 \text{ м};$$

$$h'_2 - h'_4 + h'_5 = 8,3438 - 1,3669 - 6,9769 = 0;$$

$$h'_5 - h'_6 + h'_7 = -6,9769 + 0,8989 + 6,0780 = 0.$$

9. Оценка точности:

- вычислим ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{9,737}{7-3}} = 15,6 \text{ мм};$$

при этом надежность определения ошибки единицы веса составит

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}} = \frac{15,6}{\sqrt{2(7-3)}} = 5,5 \text{ мм};$$

- средняя квадратическая ошибка на 1 км нивелирного хода

$$m_{1\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{15,6}{\sqrt{10}} = 4,9 \text{ мм};$$

- оценку точности определения уравненных значений отметок произведем с помощью весовых коэффициентов  $Q_{ij}$ , вычисленных в табл. 7 попутно с решением нормальных уравнений, контроль нахождения весовых коэффициентов

производится согласно формулам (22) и (23); средние квадратические ошибки уравнированных отметок составят:

$$m_1 = \mu \sqrt{Q_{11}} = 15,6 \cdot \sqrt{1,283} = 17,7 \text{ мм};$$

$$m_2 = \mu \sqrt{Q_{22}} = 15,6 \cdot \sqrt{0,929} = 15,0 \text{ мм};$$

$$m_3 = \mu \sqrt{Q_{33}} = 15,6 \cdot \sqrt{1,182} = 17,0 \text{ мм};$$

- определим веса двух последних неизвестных

$$P_3 = [p_{cc} \cdot 2] = 0,846; \quad P_3 = \frac{1}{Q_{33}} = \frac{1}{1,182} = 0,846$$

и

$$P_2 = \frac{[p_{bb} \cdot 1]}{[p_{cc} \cdot 1]} \cdot P_3 = \frac{1,334}{1,048} \cdot 0,846 = 1,076; \quad P_2 = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0,929} = 1,076;$$

- при оценке точности функции уравнированных отметок  $Pn$  2 и  $Pn$  3 примем разность этих отметок, т.е. пятого уравниваемого превышения

$$U = t_3 - t_2;$$

вычисление обратного веса функции выполнялось в дополнительной графе 11 (табл. 7); контроль вычисления обратного веса осуществлялся по формуле (29) в графе 12 табл. 7.

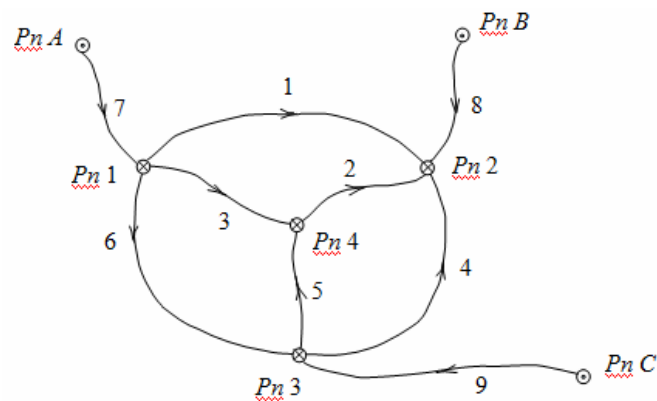
## Литература

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984.
3. Беляев Б.И. Практикум по математической обработке маркшейдерско-геодезических измерений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Недра, 1989.- 316 с.
4. Губеладзе А.Р. Основы теории ошибок измерений: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 1998.- 106 с.
5. Губеладзе А.Р. ТМОГИ. Обработка результатов измерений и уравнивание полигонометрических ходов: (Учебное пособие). - Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2013. - 93 с.
6. Губеладзе А.Р. Методические указания к заданиям по курсу «Теория математической обработки геодезических измерений». Способ наименьших квадратов. Часть 1. - Ростов н/Д: Рост. гос. акад. строит-ва, 1993.- 23 с.



# ПРИЛОЖЕНИЕ А Варианты индивидуальных заданий

Варианты 1 - 10



Исходные отметки:

$$H_A = 184,552 \text{ м;}$$

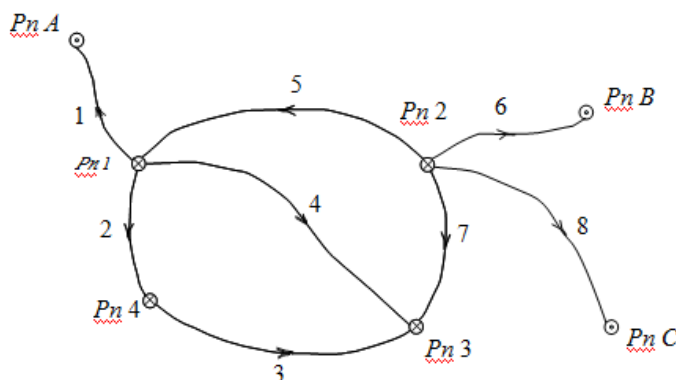
$$H_B = 194,644 \text{ м;}$$

$$H_C = 185,192 \text{ м.}$$

Таблица А1

Номер хода	Измерен. Превыше- ния, м	Длина хода, км									
		Варианты									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12,183	17,2	13,4	2,2	8,8	7,2	11,8	15,7	12,3	7,4	10,5
2	4,217	6,4	9,2	7,4	10,6	2,5	15,1	11,2	8,6	3,8	17,1
3	7,945	12,1	5,1	3,2	6,4	3,8	9,6	14,1	6,1	5,1	14,2
4	6,151	3,8	3,9	4,1	8,5	9,1	11,3	11,2	15,2	8,4	19,7
5	1,946	7,7	5,6	8,4	12,1	4,7	17,8	13,4	9,6	6,1	9,1
6	6,007	4,5	8,5	6,6	9,2	6,1	10,8	10,4	11,7	4,7	16,4
7	3,288	9,8	6,2	5,7	11,4	8,3	16,3	14,2	7,1	11,3	13,2
8	5,341	5,5	8,3	2,9	7,8	4,4	12,2	12,5	9,8	13,2	11,3
9	8,722	10,3	7,5	6,2	5,9	5,6	14,7	8,8	14,2	8,1	12,8

## Варианты 11 - 20



Исходные отметки:

$$H_A = 236,256 \text{ м};$$

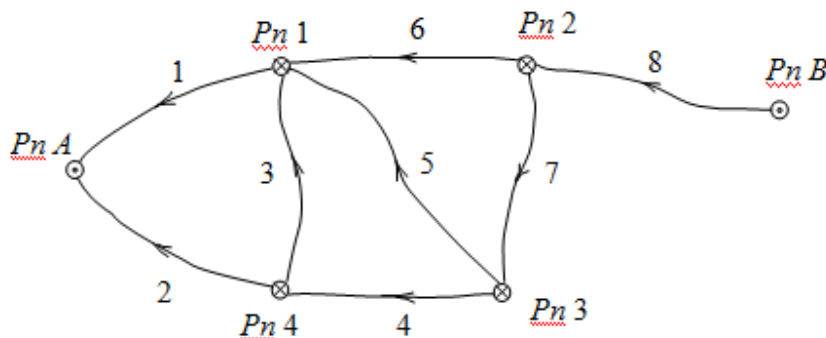
$$H_B = 218,142 \text{ м};$$

$$H_C = 230,989 \text{ м}.$$

Таблица A2

Номер хода	Измерен. Превыше- ния, м	Длина хода, км									
		Варианты									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	29,898	8,9	8,3	10,7	7,7	5,8	14,2	10,3	7,5	6,2	5,9
2	15,255	15,7	10,4	8,3	3,6	6,1	8,7	9,2	2,4	8,7	4,4
3	15,508	10,2	5,4	5,3	3,2	6,4	13,3	6,4	12,7	10,3	11,2
4	30,767	9,5	4,8	6,1	4,9	3,2	6,5	4,9	3,6	7,7	6,8
5	22,513	12,3	7,2	12,8	6,3	5,1	10,7	13,6	10,1	5,5	3,3
6	34,338	8,7	3,5	9,4	9,1	5,4	5,4	13,1	8,8	4,7	9,2
7	53,348	12,3	6,9	13,4	7,6	10,2	9,5	11,8	3,2	10,9	14,2
8	47,207	28,2	22,9	18,5	20,1	17,3	11,8	6,3	19,4	8,7	16,6

## Варианты 21 - 30



Исходные отметки:

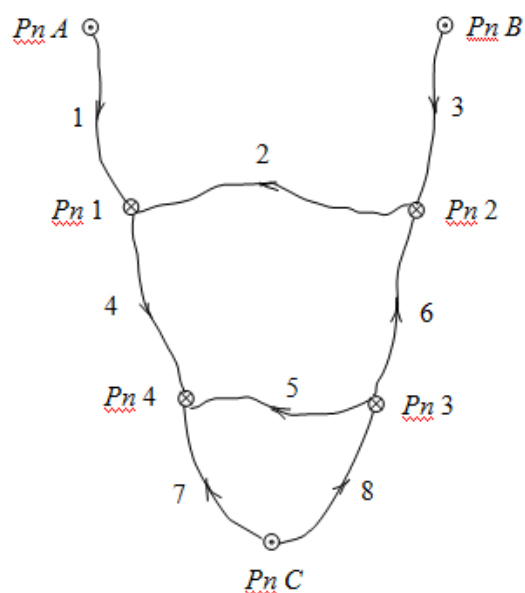
$$H_A = 65,312 \text{ м};$$

$$H_B = 44,923 \text{ м}.$$

Таблица А3

Номер хода	Измерен. Превыше- ния, м	Длина хода, км									
		Варианты									
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,023	10,1	3,5	2,3	5,9	5,8	1,3	6,8	5,6	4,6	7,9
2	7,521	7,2	6,0	6,4	4,8	3,5	7,5	7,1	3,8	10,8	12,4
3	4,482	2,7	4,6	5,6	5,0	9,0	4,5	4,9	2,7	2,8	3,1
4	6,285	6,6	4,9	9,5	3,1	11,1	3,9	3,5	9,4	9,9	7,2
5	10,792	2,7	6,7	3,8	4,9	10,8	2,0	6,2	6,8	2,6	4,4
6	14,403	6,7	4,2	4,8	2,6	5,1	5,7	2,8	7,6	8,1	10,0
7	3,599	2,5	7,1	7,5	5,6	3,7	3,0	8,4	5,1	6,2	4,0
8	2,964	5,9	5,0	8,3	2,9	5,7	4,7	3,2	3,1	7,3	11,3

## Варианты 31 - 40



Исходные отметки:

$$H_A = 183,506 \text{ м};$$

$$H_B = 192,353 \text{ м};$$

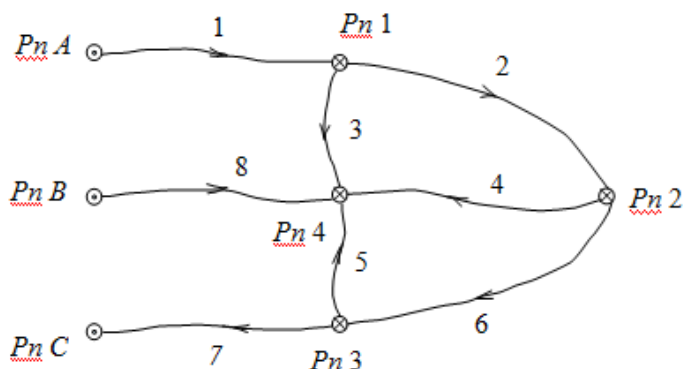
$$H_C = 191,880 \text{ м}.$$

Таблица А4

Номер хода	Измерен. Превыш ения, м	Длина хода, км									
		Варианты									
		31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	6,110	13,4	9,3	4,2	16,4	18,5	7,6	9,9	11,4	10,5	8,8
2	8,318	14,8	4,5	11,6	7,4	7,0	11,3	4,3	7,7	7,0	4,1
3	5,588	9,1	9,6	3,2	2,2	10,6	3,2	11,0	5,5	3,3	7,1
4	1,369	13,0	8,8	4,0	11,7	14,9	6,4	4,3	6,0	12,4	10,0

5	4,696	6,1	4,5	3,3	5,7	11,7	10,6	7,9	3,2	5,3	3,9
6	11,640	5,8	4,0	11,6	5,3	8,7	8,8	3,9	8,0	2,1	12,9
7	-0,905	8,2	11,4	12,8	3,4	7,1	8,2	2,9	11,0	12,3	5,5
8	-5,578	10,7	7,6	9,7	10,1	5,2	2,3	5,9	1,9	6,8	7,6

### Варианты 41 – 50



Исходные отметки:

$$H_A = 188,456 \text{ м;}$$

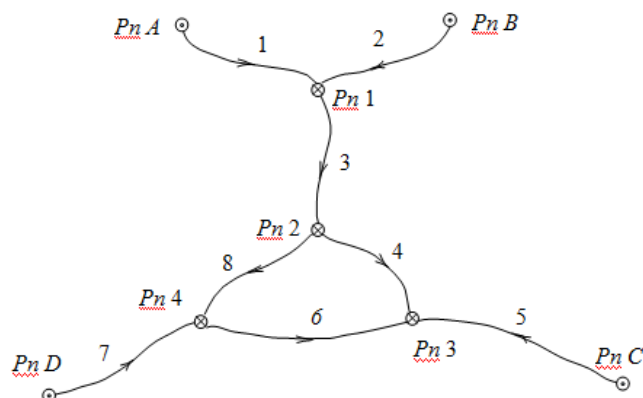
$$H_B = 188,836 \text{ м;}$$

$$H_C = 186,300 \text{ м.}$$

Таблица А5

Номер хода	Измерен. Превыше- ния, мм	Длина хода, км									
		Варианты									
		41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2,208	9,2	4,5	8,7	4,2	6,7	9,2	8,3	3,5	7,7	5,0
2	1,560	13,8	5,4	11,6	6,8	4,2	3,3	10,4	9,9	5,2	4,1
3	-0,312	7,4	6,2	8,3	7,7	9,9	2,8	3,1	12,5	11,3	3,4
4	-1,892	10,6	12,4	4,4	3,8	6,9	1,9	13,3	4,5	2,4	7,1
5	0,911	3,9	5,3	3,8	2,9	10,4	10,0	4,4	2,7	12,8	4,2
6	-2,820	2,5	9,5	14,7	10,1	4,3	2,9	5,2	8,3	8,2	6,1
7	-3,140	5,9	3,4	4,8	2,4	5,2	5,1	2,9	4,2	8,4	10,5
8	1,509	8,3	6,3	7,9	2,1	6,2	5,3	8,8	8,7	7,2	2,3

### Варианты 51 – 60



Исходные отметки:

$$H_A = 235,922 \text{ м;}$$

$$H_B = 202,308 \text{ м;}$$

$$H_C = 207,807 \text{ м;}$$

$$H_D = 169,949 \text{ м.}$$

Таблица А6

Номер хода	Измерен. Превыш ения, мм	Длина хода, км									
		Варианты									
		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-15,022	12,1	4,2	3,3	10,1	3,4	5,0	10,4	3,1	10,0	11,6
2	18,585	9,5	10,3	5,4	3,6	8,8	2,7	6,6	8,2	4,8	5,6
3	-24,046	12,4	10,0	4,8	6,6	12,5	11,5	11,0	9,9	5,9	8,1
4	5,702	6,9	5,4	10,0	7,7	8,2	9,9	4,7	5,6	5,1	9,4
5	-5,246	5,3	2,9	6,4	10,9	5,5	4,7	3,3	7,9	6,7	4,1
6	24,895	8,2	7,5	10,6	6,4	3,9	7,1	5,4	8,0	5,3	9,2
7	7,728	5,0	4,4	6,3	3,8	7,2	3,8	7,7	5,2	6,9	3,8
8	-19,201	7,0	10,6	11,1	4,5	6,3	7,2	3,3	8,4	4,8	5,9