

А.Р. Губеладзе

Т М О Г И

**Обработка результатов измерений и
уравнивание полигонометрических ходов**

**Ростов-на-Дону
2013**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

А. Р. Губеладзе

Т М О Г И

**Обработка результатов измерений и
уравнивание полигонометрических ходов**

Утверждено редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Ростов-на-Дону

2013

УДК 528.1
ББК 26.104

Рецензент: доктор технических наук,
профессор кафедры "Маркшейдерское дело и геодезия"
Южно-Российского государственного политехнического
университета (НПИ) имени М.И. Платова
Ю.В. Посыльный

Губеладзе А.Р.

ТМОГИ. Обработка результатов измерений и уравнивание полигонометрических ходов: учебное пособие. - Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2013. - 93 с.

Учебное пособие составлено по основным разделам программы курса "Теория математической обработки геодезических измерений". Изложены основы теории ошибок измерений. Изложены вопросы, связанные с теорией параметрического и коррелятного способов уравнивания, основанных на принципе наименьших квадратов. Приведена оценка точности линейно-угловых построений. Рассмотрены способы уравнивания и оценки точности различных ходов и сетей полигонометрии.

Предназначено для обучающихся по специальности 120401.65 "Прикладная геодезия" и по направлению подготовки 120100.62 "Геодезия и дистанционное зондирование".

Данное учебное пособие издано при непосредственной помощи и поддержке Ростовского государственного строительного университета.

УДК 528.1

© Ростовский государственный
строительный университет, 2013
© Губеладзе А.Р., 2013

ВВЕДЕНИЕ

При любой точности измерений полученные результаты содержат в себе ошибки, вызванные изменяющимися условиями, в которых производились эти измерения. Необходимую точность можно обеспечить выбором методики измерений с учетом комплекса всех условий. Но при этом возникают задачи получения наиболее надежных окончательных результатов с достаточной степенью точности.

В общем виде решаемые задачи формулируются следующим образом:

- 1) нахождение наиболее надежного значения из всех результатов многократных измерений одной величины;
- 2) оценка точности, как самих измерений, так и функций от измеренных значений;
- 3) изучение методов уравнивания измеренных величин
- 5) алгоритмическое обеспечение математической обработки результатов геодезических измерений.

У геодезиста возникает необходимость разработки такой методики выполнения работ, при которой ошибки не превышали бы установленных допусков. Поскольку истинные значения измеряемых величин неизвестны, однако, вводя в результаты измерений соответствующие поправки, можно приблизиться к достоверным значениям с той или иной точностью. В практической деятельности перед геодезистом возникают следующие задачи:

- 1) установление необходимой и достаточной точности измерений;
- 2) определение методов и средств, необходимых для получения установленной точности;
- 3) выбор методики уравнивания результатов измерений для получения наилучших результатов;
- 5) определение качества и точности выполненных измерений и полученных после обработки величин.

1. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ И МЕРЫ ТОЧНОСТИ

1.1. Общие сведения об измерениях

Под измерением следует понимать определение численного значения физической величины с помощью специальных технических средств, или это есть процесс сравнения какой-либо величины с другой ей однородной величиной, принятой за единицу. Измеряемая величина и единица измерения не соизмеримы друг с другом, что приводит к возникновению ошибок.

В процессе измерения участвуют следующие элементы: объект измерения; наблюдатель; инструмент; внешняя среда. Все это образует условия измерения, которые и являются источниками возникновения ошибок.

Любое измерение, как бы оно тщательно не выполнялось, сопровождается ошибкой, численно равной разности между результатом измерения и истинным значением измеряемой величины. Это значение можно назвать истинной ошибкой измерения

$$\Delta_i = x_i - X, \quad (1.1)$$

где x_i - результаты измерения;

X - истинное значение измеряемой величины.

Значения большинства величин получают как в результате непосредственных измерений, так и с помощью вычислений, т.е. прямым и косвенным способами.

Объектами измерений могут быть как однородные, так и неоднородные величины. Например, в триангуляции измеряются однородные величины (углы), а в полигонометрии - неоднородные (углы и длины линий). Вместе с тем основные определяемые величины - координаты пунктов - в том и другом случае являются однородными.

Различают необходимые и избыточные измеренные величины. Необходимыми являются измеренные величины, достаточные для однозначного определения значений искомых величин. Измерения, выполненные сверх не-

обходимых, будут избыточными. Они играют в теории ошибок важную роль, так как позволяют:

- контролировать качество выполненных работ, выявляя результаты с грубыми ошибками;
- оценить точность выполненных измерений;
- определять наиболее надежные значения измеряемых величин;
- производить уравнивание геодезических построений.

По отношению к точности результаты измерений можно подразделить на равноточные и неравноточные. Равноточными являются такие измерения, которые выполняются

- а) одним и тем же инструментом или разными инструментами, но с одинаковой точностью;
- б) одними и теми же методами или способами;
- в) в одних и тех же условиях.

Если какое-либо из перечисленных пунктов не соблюдается, то измерения относятся к неравноточным.

Особым качеством результатов измерений является их взаимная независимость. Наиболее полная независимость достигается в том случае, если измерения произведены в различных условиях. В своей же массе большинство результатов измерений можно отнести к зависимым. Однако практика геодезических работ позволяет пренебречь в пределах точности измерений возникающими в этом случае зависимостями.

1.2. Виды ошибок измерений

Причинами возникновения ошибок в результате измерений являются:

- 1) изменение величины или состояния объекта в процессе измерения;
- 2) личные ошибки наблюдателя;
- 3) инструментальные ошибки измерений;
- 4) влияние внешней среды.

Возникшие при этом ошибки можно подразделить на три вида: грубые, систематические и случайные.

К грубым ошибкам относятся промахи, просчеты при измерениях, а также ошибки, превосходящие допустимые значения. Грубые ошибки выявляются повторными измерениями и исключаются из результатов. Следовательно, задача сводится к организации контроля наблюдений.

Если среднее арифметическое из ошибок равноточных измерений стремится к некоторому пределу, отличному от нуля, при увеличении числа измерений до бесконечности, то такие ошибки называются систематическими. К систематическим ошибкам относятся составляющие общей ошибки измерений, которые постоянны или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. Систематические ошибки по характеру действия классифицируют: на сохраняющие знак и величину; меняющиеся по величине, но сохраняющие знак (одностороннее действующие); изменяющиеся по какому-либо функциональному закону. Анализ причин возникновения систематических ошибок позволяет частично или полностью исключить их из результатов измерений. Величина систематических ошибок зависит от методики измерений.

Если среднее арифметическое из ошибок равноточных измерений одной и той же величины стремится к нулю при увеличении числа измерений до бесконечности, то такие ошибки называются случайными. Случайная ошибка является той частью общей ошибки, которая меняется при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные ошибки по величине чаще всего больше систематических, но из-за взаимных компенсаций их влияние на окончательный результат может быть слабее.

1.3. Свойства случайных ошибок

Случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения с плотностью

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.2)$$

где t - текущее значение случайной ошибки измерений;

σ - среднее квадратическое отклонение (стандарт) генеральной совокупности этих ошибок.

Из анализа функции (1.2) имеем:

- 1) функция достигает максимальных значений при $t = 0$;
- 2) функция четная, т.е. $f(t) = f(-t)$; отсюда следует, что кривая симметрична относительно значения $t = 0$;
- 3) математическое ожидание случайных ошибок измерений определится согласно

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 0; \quad (1.3)$$

- 4) дисперсия случайных ошибок измерений запишется в виде

$$D(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sigma^2. \quad (1.4)$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(t)}. \quad (1.5)$$

Равенство (1.2) носит название уравнения кривой Гаусса. Свойства ее совпадают с кривой нормального распределения (рис.1). Отсюда получим следующие свойства случайных ошибок измерений.

1. При данных условиях измерений случайные ошибки не могут превысить по абсолютной величине определенного предела, т.е.

$$|\Delta| = \Delta_{np} = 3\sigma. \quad (1.6)$$

2. Малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие.

3. Положительные ошибки появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки, т.е.

$$p(\Delta < 0) = p(\Delta > 0) = 0,5. \quad (1.7)$$

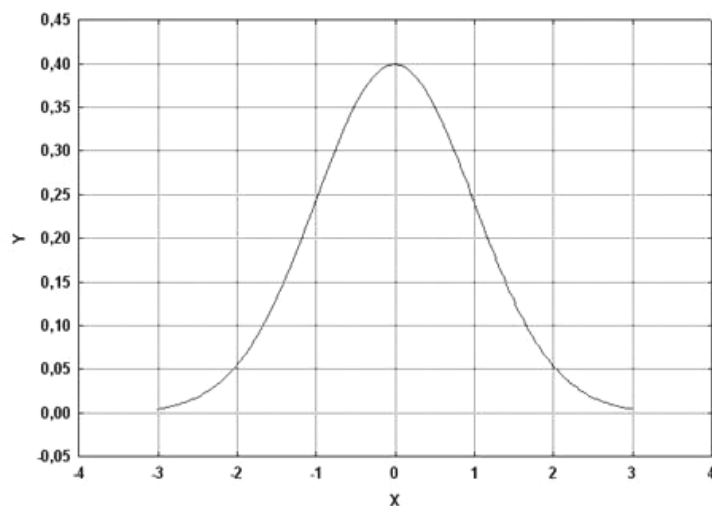


Рис. 1. График плотности нормального распределения

4. Среднее арифметическое из случайных ошибок измерений одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \quad (1.8)$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} \neq 0$, то в этом случае систематическое влияние полностью не исключено.

1.4. Критерии точности результатов измерений

Для оценки точности отдельного измерения некоторой величины необходимо определить возможные отклонения результатов измерения этой величины от ее истинного значения. Суждение о точности выполненных измерений можно получить по степени различия результатов измерений в ряду: чем

больше разбросаны результаты в ряду, тем сильнее рассеивание (дисперсия) ряда, тем менее точны измерения.

В качестве меры точности Гаусс предложил принять среднее квадратическое отклонение или среднюю квадратическую ошибку согласно равенству (1.5)

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \quad (1.9)$$

Вся теория математической обработки результатов измерений построена на использовании средней квадратической ошибки, которая обладает рядом преимуществ:

- 1) при вычислении нет необходимости учитывать знак величины Δ_i отдельных ошибок;
- 2) большие по абсолютному значению величины Δ_i после возведения в степень увеличивают ее численные значения, создавая своего рода запас «прочности»;
- 3) значение средней квадратической ошибки m получается со знаком « \pm », что соответствует природе случайных ошибок.

Отличием средней квадратической ошибки m от стандарта σ является то, что средняя квадратическая ошибка - величина эмпирическая, вычисляемая из ограниченного числа измерений, а стандарт - величина постоянная, характеризующая бесконечную совокупность данного вида измерений. Она является величиной теоретической. При $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \sigma$.

Так как σ всегда остается неизвестным, то приходится пользоваться его «оценкой» m , т.е. $m \approx \sigma$, которое в свою очередь определяется с ошибкой m_m

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \quad (1.10)$$

По величине средней квадратической ошибки, определяющей условия измерения, можно установить предельную ошибку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{k} = 0. \quad (1.20)$$

Перейдем к средним квадратическим ошибкам функции независимых величин, учитывая равенство (1.9), а также условие (1.20)

$$M_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2 m_n^2, \quad (1.21)$$

где m_i – средние квадратические ошибки измеренных величин.

1.6. Неравноточные измерения и их веса

В практике математической обработки результатов геодезических измерений встречаются случаи, когда приходится анализировать накопленный материал с неодинаковым числом измерений, инструментами разной точности, с различным числом измеряемых величин и различной протяженности, выполненных в разных условиях, т.е. в этом случае имеем дело с неравноточными измерениями.

Достоинство результата измерения, меру его надежности выразим числом, называемым весом этого измерения.

Пусть некоторая величина измерялась неравноточно n раз

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

тогда веса результатов измерений будут равны

$$p_1 = \frac{C}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{C}{m_2^2}; \quad \dots; \quad p_n = \frac{C}{m_n^2}, \quad (1.22)$$

где C – коэффициент пропорциональности, который может быть выбран любым, но одинаковым для данного ряда измерений.

1.7. Вес функции независимых величин

Определим вес функции (1.14). При этом известны веса аргументов p_1, p_2, \dots, p_n . В случае независимых величин имеем согласно (1.21)

$$M_F^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2.$$

Разделим обе части равенства на μ^2

$$\frac{M_F^2}{\mu^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \frac{m_1^2}{\mu^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 \frac{m_2^2}{\mu^2} + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \frac{m_n^2}{\mu^2},$$

так как $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$, то окончательно имеем

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}. \quad (1.23)$$

2. СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

2.1. Сущность принципа наименьших квадратов

Для однозначного определения значений k неизвестных параметров необходимо и достаточно измерить k величин. Поскольку в геодезии существует принцип избыточности измерений, то число $r = n - k$, где n - число всех измеренных величин, является избыточным. При этом избыточные измерения должны находиться с необходимыми в функциональной зависимости. Наилучшее решение в процессе обработки результатов измерений получают согласно принципу наименьших квадратов, который состоит из следующего условия

$$[pvv] = \min, \quad (2.1)$$

где p - веса измеренных величин;

v - поправки в измеренные значения.

Пусть даны результаты равноточных измерений одной величины x_1, x_2, \dots, x_n . При этом следует иметь в виду, что истинное значение X измеряемой величины известно.

Составим ряд истинных ошибок результатов измерений согласно равенству (1.1)

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= x_1 - X; \\ \Delta_2 &= x_2 - X; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n &= x_n - X.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Почленно сложив равенства (2.2), получим следующее значение:

$$[\Delta] = [x] - nX.$$

В результате, предварительно разделив на n , будем иметь

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[x]}{n} - X.\tag{2.3}$$

Введем обозначение $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$ - среднее арифметическое значение измеряемой величины. Тогда

$$\frac{[\Delta]}{n} = \bar{x} - X.\tag{2.4}$$

На основании четвертого свойства случайных ошибок можно утверждать, что $\bar{x} \rightarrow X$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. среднее арифметическое из результатов равноточных измерений стремится к истинному значению этой величины при неограниченном возрастании числа измерений.

Среднее арифметическое из данного ряда равноточных измерений принимается за наиболее надежное значение и при конечном числе измерений.

Пусть $x' \neq \bar{x}$, тогда

$$v'_i = x_i - x'; \quad v_i = x_i - \bar{x}.$$

Установим связь между отклонениями v и v'

$$v'_i - v_i = \bar{x} - x'. \quad (2.5)$$

В равенстве (2.5) v_i перенесем в правую часть. Затем, умножая на соответствующие веса квадраты отклонений от среднего арифметического, почленно сложим

$$[pv'v'] = [pvv] + 2[pv](\bar{x} - x') + [p](\bar{x} - x')^2. \quad (2.6)$$

В правой части равенства (2.6) слагаемое $2[pv](\bar{x} - x') = 0$ согласно первому свойству отклонений. Следовательно, из равенства (2.6) следует, что

$$[pvv] < [pv'v']. \quad (2.7)$$

Данное свойство подтверждает, что если ошибки результатов неравноточных измерений подчиняются нормальному закону распределения, то наиболее надежным значением является общая арифметическая средина.

Определение окончательных значений искомых величин при избыточных измерениях называют уравниванием, а эти же действия с соблюдением условия (2.1) - уравниванием по способу наименьших квадратов или строгим уравниванием.

Докажем, что арифметическое среднее удовлетворяет принципу наименьших квадратов. Предположим, что некоторая величина равномерно измерялась n раз:

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Наиболее надежное значение из результатов измерений составит X , тогда

$$v_i = X - x_i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Определим значение X под условием (2.1).

$$R = [vv] = (X - x_1)^2 + (X - x_2)^2 + \dots + (X - x_n)^2 = \min.$$

$$\frac{\partial R}{\partial X} = 2(X - x_1) + 2(X - x_2) + \dots + 2(X - x_n) = 0,$$

откуда

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}. \quad (2.8)$$

В случае неравноточных измерений

$$R = [pvv] = p_1 \cdot (X - x_1)^2 + p_2 \cdot (X - x_2)^2 + \dots + p_n \cdot (X - x_n)^2 = \min.$$

$$\frac{\partial R}{\partial X} = 2p_1(X - x_1) + 2p_2(X - x_2) + \dots + 2p_n(X - x_n) = 0$$

следовательно

$$X = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[px]}{[p]}. \quad (2.9)$$

Таким образом, подтверждается вывод, что среднее арифметическое является наилучшим значением из всех результатов измерений какой-либо величины.

Способы уравнивания, не реализующие принцип наименьших квадратов, относятся к приближенным способам.

Строгое уравнивание может быть реализовано либо параметрическим, либо коррелятным способами или их разновидностями.

2.2. Параметрический способ уравнивания

2.2.1. Теория параметрического способа уравнивания

В геодезической практике встречаются случаи, когда необходимо определить некоторые величины косвенным путем, причем эти величины должны быть связаны с измеряемыми функциональными зависимостями.

Предположим нам известны результаты измерений n величин x_1, x_2, \dots, x_n . Требуется определить надежные значения k величин T_1, T_2, \dots, T_k , которые связаны с уравненными значениями X_1, X_2, \dots, X_k измеренных величин определенными функциональными зависимостями:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1(T_1, T_2, \dots, T_k); \\ X_2 &= F_2(T_1, T_2, \dots, T_k); \\ &\dots\dots\dots \\ X_n &= F_n(T_1, T_2, \dots, T_k). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Равенства такого вида называются параметрическими уравнениями связи. Согласно (2.10) имеем

$$\begin{aligned} F_1(T_1,T_2,...,T_k)-X_1 &=0; \\ F_2(T_1,T_2,...,T_k)-X_2 &=0; \\ \\ F_n(T_1,T_2,...,T_k)-X_n &=0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

В случае, если имеют место результаты неравноточных измерений x_1, x_2, \dots, x_n , устанавливают веса p_1, p_2, \dots, p_n .

Уравненные значения измеренных величин будут

$$X_i = x_i + v_i, \quad (2.12)$$

где v_i - поправки в результаты измерений.

Тогда равенства (2.11) с учетом (2.12) примут вид

$$\begin{aligned} F_1(T_1, T_2, \dots, T_k) - x_1 &= v_1; \\ F_2(T_1, T_2, \dots, T_k) - x_2 &= v_2; \\ &\vdots \\ F_n(T_1, T_2, \dots, T_k) - x_n &= v_n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полученные равенства называются уравнениями поправок в общем виде.

В системе (2.13) число неизвестных будет $n + k > n$, т.е. превысит число уравнений в системе, что приводит к неопределенности решения. Для нахождения неизвестных воспользуемся принципом наименьших квадратов. Определим значения T_1, T_2, \dots, T_k при условии

$$[pvv] = \min.$$

КИ К НИМ δt_j

$$T_j = t_j + \delta t_j. \quad (2.14)$$

Полученные значения неизвестных из (2.14) подставляем в уравнения системы (2.13). В результате чего получим

[illegible]

Приведем уравнения системы (2.15) к линейному виду, разложив в ряд Тейлора, при этом ограничиваясь только первыми степенями разложения

$$\begin{aligned} F_1(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial t_k} \delta t_k - x_1 &= v_1; \\ F_2(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F_2}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F_2}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial t_k} \delta t_k - x_2 &= v_2; \\ &\vdots \\ F_n(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F_n}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F_n}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial t_k} \delta t_k - x_n &= v_n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Введем следующие обозначения

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_1} = a_i; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t_2} = b_i; \dots; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t_k} = g_k; \quad F_i(t_1, t_2, \dots, t_k) - x_i = l_i.$$

Подставив введенные обозначения в уравнения (2.16), получим уравнения поправок в линейном виде

$$\begin{aligned} & a_1 \delta t_1 + b_1 \delta t_2 + \dots + g_1 \delta t_k + l_1 = v_1; \\ & a_2 \delta t_1 + b_2 \delta t_2 + \dots + g_2 \delta t_k + l_2 = v_2; \\ & \dots\dots\dots \\ & a_n \delta t_1 + b_n \delta t_2 + \dots + g_n \delta t_k + l_n = v_n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Следовательно, коэффициенты a_i , b_i , ..., g_i являются частными производными от соответствующих функций по приближенным значениям искомым

аргументов, а свободный член l_i - разность между приближенными и измеренными значениями функций.

Для решения и нахождения поправок δt_j согласно принципу наименьших квадратов составим функцию

[illegible]

Исследуем функцию (2.18) на экстремум, взяв частные производные по δt_i , полученные выражения приравняем к нулю

[illegible]

Сократив все члены равенств на 2 и приведя подобные, получим в символах Гаусса следующие уравнения в символах Гаусса:

[illegible]

Согласно (2.17 и (2.19) можно увидеть следующие свойства поправок

$$[pav]=[pbv]=...=[pgv]=0. \quad (2.20)$$

Уравнения системы (2.19) называются нормальными уравнениями и обладают следующими свойствами:

1. По диагонали слева вниз направо расположены квадратичные коэффициенты.
2. Остальные коэффициенты располагаются относительно квадратичной диагонали симметрично.

В том случае, если однородные измерения равноточны, то их веса принимаются равными единице и система уравнений (2.19) принимает следующий вид:

[illegible]

Системы (2.19) и (2.21) имеют вполне определенное решение, поскольку мы имеем k число неизвестных и такое же число уравнений.

2.2.2. Матричный вид параметрического уравнения

Система параметрических уравнений поправок (2.17) в матричной форме можно представить в следующем виде:

$$V = AT + L....|P, \quad (2.22)$$

где V - вектор искомых поправок в результаты измерений:

A – матрица коэффициентов уравнения;

T – вектор поправок в принятые приближенные значения неизвестных;

L – вектор свободных членов;

P – диагональная матрица весов.

Все члены, входящие в уравнение матрицы, равны:

$$V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots g_1 \\ a_2 b_2 \dots g_2 \\ \dots \\ a_n b_n \dots g_n \end{vmatrix}; \quad T = \begin{vmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \dots \\ \delta t_n \end{vmatrix}; \quad L = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_3 \end{vmatrix}; \quad P = \begin{vmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & \dots \\ & & & p_n \end{vmatrix}. \quad (2.23)$$

Условие наименьших квадратов (2.1) в матричной форме имеет вид:

$$V'PV = \min, \quad (2.24)$$

где транспонированный вектор

$$V' = T'A' + L'. \quad (2.25)$$

В условие (2.24) подставим правые части выражений (2.22) и (2.25)

$$\begin{aligned} V'PV &= (T'A' + L')P(AT + L) = (T'A'P + L'P)(AT + L) = \\ &= T'A'PAT + ATL'P + T'A'PL + L'PL = \min \end{aligned}$$

Поскольку в полученном выражении $ATL'P = T'A'PL$, то условие наименьших квадратов (2.24) примет вид:

$$\Phi = V'PV = T'(A'PA)T + 2(LPA')T' + L'PL = \min.$$

Найдем производную функции Φ по T' и приравняем к нулю, в результате получим следующее

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T'} = 2(A'PA)T + 2(LPA') = 0,$$

откуда после сокращений

$$(A'PA)T + LPA' = 0. \quad (2.26)$$

Введем обозначения

$$N = A'PA,$$

тогда

$$NT + LPA' = 0, \quad (2.27)$$

В результате получена матрица системы нормальных уравнений, где

$$N = A'PA = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots \\ g_1 g_2 \dots g_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots \\ g_1 g_2 \dots g_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [paa][pab] \dots [pag] \\ [pab][pbb] \dots [pbg] \\ \dots \\ [pag][pbg] \dots [pgg] \end{vmatrix}, \quad (2.28)$$

а вектор свободных членов

$$A'PL = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \dots \\ g_1 g_2 \dots g_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \dots \\ [pgl] \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

Подставив полученные значения из (2.27) и (2.28) в уравнение (2.27), получим обычный вид системы нормальных уравнений в параметрическом способе уравнивания

$$\begin{aligned} [paa]\delta t_1 + [pab]\delta t_2 + \dots + [pag]\delta t_k + [pal] &= 0; \\ [pab]\delta t_1 + [pbb]\delta t_2 + \dots + [pbg]\delta t_k + [pbl] &= 0; \\ \dots & \\ [pag]\delta t_1 + [pbg]\delta t_2 + \dots + [pgg]\delta t_k + [pgl] &= 0. \end{aligned}$$

2.2.3 Составление нормальных уравнений

Составим коэффициенты нормальных уравнений, используя уравнения поправок в линейном виде

Умножая равенства (2.30) последовательно на $p_ia_i, p_ib_i, \dots, p_ig_i, p_il_i$ и p_is_i и просуммировав, получим:

[illegible]

Контролем будут следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [pas]; \quad \Sigma_2 = [pbs]; \quad \dots; \quad \Sigma_k = [pgs]; \\ \Sigma_{k+1} &= [pls]; \quad \Sigma_{k+2} = [pss]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2.4. Решение нормальных уравнений

Способ последовательного исключения неизвестных. Способы решения нормальных уравнений делятся на строгие (точные) и приближенные (итеративные).

Из значительного числа способов решения нормальных уравнений можно выделить способ последовательного исключения неизвестных, предложенный Гауссом.

Для простоты изложения данного способа ограничимся системой, содержащей три нормальных уравнения:

$$\begin{aligned} [paa]\delta t_1 + [pab]\delta t_2 + [pac]\delta t_3 + [pal] &= 0; \\ [pab]\delta t_1 + [pbb]\delta t_2 + [pbc]\delta t_3 + [pbl] &= 0; \\ [pac]\delta t_1 + [pbc]\delta t_2 + [pcc]\delta t_3 + [pcl] &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из первого уравнения системы (2.33) выразим первое неизвестное δt_1

$$\delta t_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}\delta t_2 - \frac{[pac]}{[paa]}\delta t_3 - \frac{[pal]}{[paa]}. \quad (2.34)$$

Мы получили первое элиминационное уравнение. Значение первого неизвестного подставляем во второе и третье уравнения системы (2.33)

$$\begin{aligned} \left([pbb] - \frac{[pab][pab]}{[paa]} \right) \delta_2 + \left([pbc] - \frac{[pab][pac]}{[paa]} \right) \delta_3 + \left([pbl] - \frac{[pab][pal]}{[paa]} \right) &= 0; \\ \left([pbc] - \frac{[pab][pac]}{[paa]} \right) \delta_2 + \left([pcc] - \frac{[pac][pac]}{[paa]} \right) \delta_3 + \left([pcl] - \frac{[pac][pal]}{[paa]} \right) &= 0; \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} [pbb] - \frac{[pab][pab]}{[paa]} &= [pbb \cdot 1]; \\ [pbc] - \frac{[pab][pac]}{[paa]} &= [pbc \cdot 1]; \\ [pbl] - \frac{[pab][pal]}{[paa]} &= [pbl \cdot 1]; \\ [pcc] - \frac{[pac][pac]}{[paa]} &= [pcc \cdot 1]; \\ [pcl] - \frac{[pac][pal]}{[paa]} &= [pcl \cdot 1]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

В результате получим систему следующих уравнений

$$\begin{aligned} [pbb \cdot 1] \delta_2 + [pbc \cdot 1] \delta_3 + [pbl \cdot 1] &= 0; \\ [pbc \cdot 1] \delta_2 + [pcc \cdot 1] \delta_3 + [pcl \cdot 1] &= 0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Из первого уравнения системы (2.36) находим второе неизвестное

$$\delta_2 = -\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \delta_3 - \frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}. \tag{2.37}$$

Получили второе элиминационное уравнение. Подставляя значение δ_2 во второе уравнение системы (2.36), соответственно получим

$$\left([pcc \cdot 1] - \frac{[pbc \cdot 1][pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \right) \delta_3 + \left([pcl \cdot 1] - \frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \right) = 0$$

или в символах Гаусса

$$[psc \cdot 2]\delta_3 + [pcl \cdot 2] = 0. \quad (2.38)$$

Откуда и определяем третье неизвестное δ_3

$$\delta_3 = -\frac{[pcl \cdot 2]}{[psc \cdot 2]}. \quad (2.39)$$

Из полученного третьего элиминационного уравнения (2.39) найденное значение третьего неизвестного подставляем в равенство (2.37) и определяем второе неизвестное δ_2 , а затем оба вычисленных значений δ_3 и δ_2 подставляем в равенство (2.34) и находим первое неизвестное δ_1 . Таким образом, систему нормальных уравнений (2.33) можно заменить эквивалентной системой:

$$\begin{aligned} [paa]\delta_1 + [pab]\delta_2 + [pac]\delta_3 + [pal] &= 0; \\ [pbb \cdot 1]\delta_2 + [pbc \cdot 1]\delta_3 + [pbl \cdot 1] &= 0; \\ [psc \cdot 2]\delta_3 + [pcl \cdot 2] &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Правило раскрытия символов Гаусса: раскрываемый алгоритм представляет собой разность двух членов, первый из которых имеет те же буквенные символы как и у раскрываемого, с числовым индексом на единицу меньше, а второй член представляет собой дробь, в знаменателе которой квадратичный символ с буквами, соответствующими предыдущему индексу, а в числителе - произведение двух символов, первые буквы которых те же, что в знаменателе, а вторые, как у раскрываемого символа. Решение нормальных уравнений осуществляется согласно схеме Гаусса-Дулитля (табл. 2).

Итеративные способы. Рассмотрим способ последовательных приближений (способ Якоби). Для простоты изложения ограничимся системой из трех нормальных уравнений

Таблица 2

Схема решения нормальных уравнений Гаусса-Дулитля

δt_1	δt_2	δt_3	l	s	Контроль
1	2	3	4	5	6
$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pal]$	$[pas]$	Σ_1
-1	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$	$-\frac{[pal]}{[paa]}$	$-\frac{[pas]}{[paa]}$	$-\frac{\Sigma_1}{[paa]}$
	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbl]$	$[pbs]$	Σ_2
	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pac]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pas]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}\Sigma_1$
	$[pbb \cdot 1]$	$[pbc \cdot 1]$	$[pbl \cdot 1]$	$[pbs \cdot 1]$	$[\Sigma_2 \cdot 1]$
	-1	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbs \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[\Sigma_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$
		$[pcc]$	$[pcl]$	$[pcs]$	Σ_3
		$-\frac{[pac]}{[paa]}[pac]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}[pas]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}\Sigma_1$
		$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbc \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbl \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbs \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[\Sigma_2 \cdot 1]$
		$[pcc \cdot 2]$	$[pcl \cdot 2]$	$[pcs \cdot 2]$	$[\Sigma_3 \cdot 2]$
		-1	$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[pcs \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[\Sigma_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$
$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$[pll]$	$[pls]$	
$-\frac{[pac]}{[paa]}\delta t_3$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}\delta t_3$	δt_3	$-\frac{[pal]}{[paa]}[pal]$	$-\frac{[pal]}{[paa]}[pas]$	
$-\frac{[pab]}{[paa]}\delta t_2$	δt_2		$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbl \cdot 1]$	$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbs \cdot 1]$	
δt_1			$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}[pcl \cdot 2]$	$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}[pcs \cdot 2]$	
			$[pll \cdot 3]$	$[pls \cdot 3]$	

$$\begin{aligned}
[paa]\delta t_1 + [pab]\delta t_2 + [pac]\delta t_3 + [pal] &= 0; \\
[pab]\delta t_1 + [pbb]\delta t_2 + [pbc]\delta t_3 + [pbl] &= 0; \\
[pac]\delta t_1 + [pbc]\delta t_2 + [pcc]\delta t_3 + [pcl] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Из каждого уравнения найдем соответствующее неизвестное

$$\begin{aligned}
\delta t_1 &= -\frac{[pab]}{[paa]}\delta t_2 - \frac{[pac]}{[paa]}\delta t_3 - \frac{[pal]}{[paa]}, \\
\delta t_2 &= -\frac{[pab]}{[pbb]}\delta t_1 - \frac{[pbc]}{[pbb]}\delta t_3 - \frac{[pbl]}{[pbb]}, \\
\delta t_3 &= -\frac{[pac]}{[psc]}\delta t_1 - \frac{[pbc]}{[psc]}\delta t_2 - \frac{[pcl]}{[psc]}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Равенства (2.42) получили название итерационных уравнений. Для дальнейшего решения примем нулевые приближения

$$\delta t_1^0 = -\frac{[pal]}{[paa]}, \quad \delta t_2^0 = -\frac{[pbl]}{[pbb]}, \quad \delta t_3^0 = -\frac{[pcl]}{[psc]}. \tag{2.43}$$

Подставим значения нулевых приближений в равенства (2.42), в результате чего получим

$$\begin{aligned}
\delta t_1' &= -\frac{[pab]}{[paa]}\delta t_2^0 - \frac{[pac]}{[paa]}\delta t_3^0 - \frac{[pal]}{[paa]}, \\
\delta t_2' &= -\frac{[pab]}{[pbb]}\delta t_1^0 - \frac{[pbc]}{[pbb]}\delta t_3^0 - \frac{[pbl]}{[pbb]}, \\
\delta t_3' &= -\frac{[pac]}{[psc]}\delta t_1^0 - \frac{[pbc]}{[psc]}\delta t_2^0 - \frac{[pcl]}{[psc]}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Полученные значения первых приближений снова подставляем в равенства (2.42) и получаем вторые приближения

$$\begin{aligned}
\delta t_1'' &= -\frac{[pab]}{[paa]}\delta t_2' - \frac{[pac]}{[paa]}\delta t_3' - \frac{[pal]}{[paa]}, \\
\delta t_2'' &= -\frac{[pab]}{[pbb]}\delta t_1' - \frac{[pbc]}{[pbb]}\delta t_3' - \frac{[pbl]}{[pbb]}, \\
\delta t_3'' &= -\frac{[pac]}{[psc]}\delta t_1' - \frac{[pbc]}{[psc]}\delta t_2' - \frac{[pcl]}{[psc]}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Подстановку полученных последующих приближений выполняют до тех пор, пока не получим искомые значения неизвестных с заданной степенью точности. Данный способ целесообразно использовать в случае малости неквадратичных коэффициентов по сравнению с квадратичными.

Для систем нормальных уравнений с любыми коэффициентами выгодно применить способ простой итерации (способ Гаусса-Зейделя). В этом случае в итерационные уравнения (2.42) подставляем значения нулевых приближений:

$$\begin{aligned}\delta t_1^0 &= -\frac{[pal]}{[paa]}; \\ \delta t_2^0 &= -\frac{[pab]}{[pbb]}\delta t_1^0 - \frac{[pbl]}{[pbb]}; \\ \delta t_3^0 &= -\frac{[pac]}{[psc]}\delta t_1^0 - \frac{[pbc]}{[psc]}\delta t_2^0 - \frac{[pcl]}{[psc]}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Приближения производятся до тех пор, пока полученные значения неизвестных не будут повторяться.

Матричный способ. Воспользуемся исходной матрицей нормальных уравнений

$$NT + LPA' = 0,\tag{2.47}$$

Умножим уравнение (2.47) на обратную матрицу N^{-1}

$$N^{-1}NT + N^{-1}A'PL = 0.$$

Принимая во внимание, что $N^{-1}N = E$, выразим искомый вектор

$$T = -N^{-1}A'PL = B L,\tag{2.48}$$

где $B = -N^{-1}A'P$ - матрица линейных преобразований.

Согласно вышесказанному мы можем вычислить вектор поправок T в приближенные значения искомых неизвестных, Подставляя вектор поправок в равенство (2.22), можно получить вектор поправок в результаты измерений

$$V = -AN^{-1}A'PL + L.\tag{2.49}$$

2.2.5. Контроли решения нормальных уравнений

При решении нормальных уравнений выполняют следующие виды контроля: промежуточный и по $[pvv]$. Промежуточный контроль – это суммарный

контроль и делается в схеме Гаусса-Дулитля согласно формулам (2.31) и (2.32) в процессе решения нормальных уравнений (табл. 2).

Основой контроля по $[p_{vv}]$ является система уравнений поправок

$$\begin{aligned} & a_1 \delta t_1 + b_1 \delta t_2 + \dots + g_1 \delta t_k + l_1 = v_1; \\ & a_2 \delta t_1 + b_2 \delta t_2 + \dots + g_2 \delta t_k + l_2 = v_2; \\ & \dots\dots\dots \\ & a_n \delta t_1 + b_n \delta t_2 + \dots + g_n \delta t_k + l_n = v_n. \end{aligned}$$

Умножим уравнения этой системы соответственно на $p_1v_1, p_2v_2, \dots, p_nv_n$ и, сложив полученные равенства, получим

$$[pav]\delta t_1 + [pbv]\delta t_2 + \dots + [pgv]\delta t_k + [plv] = [pvv].$$

Согласно (2.20) имеем

$$[plv] = [pvv]. \quad (2.50)$$

Умножим уравнения поправок $p_1 l_1, p_2 l_2, \dots, p_n l_n$ и, приведя подобные, будем иметь

$$[pal]\delta t_1 + [pbl]\delta t_2 + \dots + [pgl]\delta t_k + [pll] = [plv]. \quad (2.51)$$

На основании (2.41) получим

$$[pal]\delta t_1 + [pbl]\delta t_2 + \dots + [pgl]\delta t_k + [pll] = [pvv].$$

Подставив в полученное уравнение значения вычисленных неизвестных $\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_k$, получим

$$[pvv] = [pll \cdot k] = [pls \cdot k] = [pss \cdot k], \quad (2.52)$$

НО В СООТВЕТСТВИИ С (2.42)

$$[pll \cdot k] = [pll] + [pal]\delta_t + [pbl]\delta_r + \dots + [pgl]\delta_k. \quad (2.53)$$

Данный контроль реализуется как в схеме решения нормальных уравнений (табл.2), так и при вычислении поправок в результаты измерений (табл. 1).

2.2.6. Весовые коэффициенты и оценка точности определяемых величин

Одной из задач, решаемых геодезистом, является оценка точности, как самих производимых измерений, так и получаемых в процессе обработки результатов. Эту задачу можно решить в процессе выполнения уравнительных вычислений, определяя средние квадратические ошибки измеренных и уравненных значений в том числе и функций от этих величин.

Согласно теории ошибок измерений среднюю квадратическую ошибку какой-либо величины в общем случае определяем по формуле

$$M_Y = \frac{\mu}{\sqrt{P_Y}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_Y}}, \quad (2.54)$$

где M_Y – средняя квадратическая ошибка оцениваемой величины;

μ – ошибка единицы веса;

P_Y – вес оцениваемой величины.

На начальной стадии уравнивания произвольно принимается ошибка единицы веса μ_0 в зависимости от вида работ, которая позволяет установить веса измеряемых величин.

В результате уравнительных вычислений определяют фактическое значение ошибки единицы веса по найденным поправкам v_i согласно формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n - k}}, \quad (2.55)$$

где n – количество всех выполненных измерений;

k – число независимых неизвестных.

В геодезической практике по результатам измерений нескольких величин вычисляют значение какой-либо величины. Причем между определяемой и измеренными величинами имеется определенная функциональная зависимость. В этом случае возникает задача оценки точности искомой величины. Предположим, что оцениваемая величина задана в общем виде

$$Y = F(X_1 + X_2 + \dots + X_n). \quad (2.56)$$

Средняя квадратическая ошибка функции (2.56) определяется по формуле (2.54), в которой

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \frac{1}{p_n}.$$

Сложность в этом случае заключается в том, что оценивать приходится через результаты измерений. Поэтому в параметрическом способе уравнивания оцениваемую величину представляют через необходимые неизвестные

$$X_i = F_i(T_1, T_2, \dots, T_k). \quad (2.57)$$

Уравнения поправок будут иметь следующий вид

$$a_i \delta t_1 + b_i \delta t_2 + \dots + g_i \delta t_k + l_i = v_i. \quad (2.58)$$

Предположим, что в процессе обработки результатов было установлено три независимых неизвестных, тогда получим следующие уравнения поправок

$$a_i \delta t_1 + b_i \delta t_2 + c_i \delta t_3 + l_i = v_i. \quad (2.59)$$

Согласно принципу наименьших квадратов $[pvv]$, получим следующую систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned} [paa]\delta t_1 + [pab]\delta t_2 + [pac]\delta t_3 + [pal] &= 0; \\ [pab]\delta t_1 + [pbb]\delta t_2 + [pbc]\delta t_3 + [pbl] &= 0; \\ [pac]\delta t_1 + [pbc]\delta t_2 + [psc]\delta t_3 + [pcl] &= 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для решения данной системы и нахождения неизвестных воспользуемся способом неопределенных множителей Q_{ij} . Каждое уравнение системы (2.60) умножим соответственно на неопределенные множители Q_{11} , Q_{12} , Q_{13} . В результате группирования относительно неизвестных δt_1 , δt_2 , δt_3 получим следующее равенство

$$\begin{aligned} ([paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13})\delta t_1 + \\ + ([pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13})\delta t_2 + \\ + ([pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [psc]Q_{13})\delta t_3 + \\ + [pal]Q_{11} + [pbl]Q_{12} + [pcl]Q_{13} = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Из равенства (2.61) найдем первое неизвестное δt_1 , подобрав множители таким образом, чтобы коэффициенты (выражения в скобках) при δt_2 и δt_3 равнялись нулю, а при δt_1 был равен единице. Тогда равенство (2.61) примет вид

$$\delta t_1 = -[pal]Q_{11} - [pbl]Q_{12} - [pcl]Q_{13}. \quad (2.62)$$

Коэффициенты при неизвестных образуют систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned} [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} &= 1; \\ [pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} &= 0; \\ [pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [psc]Q_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Аналогичным образом, умножая уравнения системы (2.60) соответственно на множители Q_{21} , Q_{22} и Q_{23} и приравняв коэффициент при втором неизвестном единице, а при первом и третьем - нулю, получаем второе неизвестное δt_2

$$\delta t_2 = -[pal]Q_{21} - [pbl]Q_{22} - [pcl]Q_{23}. \quad (2.64)$$

Образовалась вторая система нормальных уравнений с неизвестными Q_{21} , Q_{22} и Q_{23}

$$\begin{aligned} [paa]Q_{21} + [pab]Q_{22} + [pac]Q_{23} &= 0; \\ [pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + [pbc]Q_{23} &= 1; \\ [pac]Q_{21} + [pbc]Q_{22} + [psc]Q_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Таким же образом, используя множители Q_{31} , Q_{32} и Q_{33} , получаем третье неизвестное δt_3 и третью систему нормальных уравнений

$$\delta t_3 = -[pal]Q_{31} - [pbl]Q_{32} - [pcl]Q_{33}. \quad (2.66)$$

Новая система примет вид

$$\begin{aligned} [paa]Q_{31} + [pab]Q_{32} + [pac]Q_{33} &= 0; \\ [pab]Q_{31} + [pbb]Q_{32} + [pbc]Q_{33} &= 0; \\ [pac]Q_{31} + [pbc]Q_{32} + [psc]Q_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Рассмотренный способ нахождения неизвестных δt_j является менее эффективным по сравнению со способом последовательного исключения неизвестных. Неопределенные множители можно использовать для оценки точности вычисленных значений неизвестных. Для этого рассмотрим свойства наших множителей Q_{ij} . Представим уравнение (2.62) в следующем виде:

[illegible]

Обозначим

[illegible]

Следовательно, равенство (2.57) примет вид:

$$\delta t_1 = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n. \quad (2.70)$$

Умножим равенства (2.69) на a_1, a_2, \dots, a_n , вследствие чего получим

$$[a\alpha] = -([paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13}) = -1. \quad (2.71)$$

По аналогии, умножив равенства (2.69) соответственно на b_1, b_2, \dots, b_n , получим

$$[b\alpha] = -([pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13}) = 0. \quad (2.72)$$

Аналогично при умножении на c_1, c_2, \dots, c_n имеем

$$[c\alpha] = -([pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13}) = 0. \quad (2.73)$$

Для дальнейшего перемножим левые и правые части равенств (2.69) на

$$\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{p_n}, \text{ в результате сложения получим}$$

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p} \right] = Q_{11}. \quad (2.74)$$

Определим вес линейной функции (2.70). Поскольку в данном равенстве l_i являются функцией результатов измерений x_i , следовательно, и имеют соответствующие веса, тогда вес функции (2.61) будет равен

$$\frac{1}{P_1} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_n^2}{p_n} = \left[\frac{\alpha\alpha}{p} \right]. \quad (2.75)$$

Сравнивая выражения (2.74) и (2.75), делаем вывод, что множитель Q_{11} является обратным весом первого неизвестного δt_1 , т.е.

$$\frac{1}{P_1} = Q_{11}. \quad (2.76)$$

Таким образом, можно принять неопределенные множители за весовые коэффициенты.

Рассмотрим равенство (2.64). По аналогии с предыдущим это выражение можно представить в виде

$$\delta t_2 = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n = [\beta l]. \quad (2.77)$$

Исходя из свойств весовых коэффициентов, получим следующие значения

$$[a\beta] = 0; \quad [b\beta] = 1; \quad [c\beta] = 0, \quad (2.78)$$

а

$$\left[\frac{\beta\beta}{p} \right] = Q_{22} \quad \text{и} \quad \frac{1}{P_2} = Q_{22}. \quad (2.79)$$

Если воспользоваться уравнением (2.66) для третьего неизвестного δt_3 , то в результате соответствующих обозначений и преобразований получим

$$\delta t_3 = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots + \gamma_n l_n = [\gamma l]. \quad (2.80)$$

Дальнейший анализ свойств весовых коэффициентов приводит к следующим результатам

Таблица 3

Вычисление весовых коэффициентов и обратного веса функции

Q_1	Q_2	Q_3	f	Σu
7	8	9	11	12
$[pal]_1 = -1$	$[pal]_2 = 0$	$[pal]_3 = 0$	f_1	Σu_1
$-\frac{[pal]_1}{[paa]}$	$-\frac{[pal]_2}{[paa]}$	$-\frac{[pal]_3}{[paa]}$	$-\frac{f_1}{[paa]}$	$-\frac{\Sigma u_1}{[paa]}$
$[pbl]_1 = 0$	$[pbl]_2 = -1$	$[pbl]_3 = 0$	f_2	Σu_2
$-\frac{[pab]}{[paa]} [pal]_1$	$-\frac{[pab]}{[paa]} [pal]_2$	$-\frac{[pab]}{[paa]} [pal]_3$	$-\frac{[pab]}{[paa]} f_1$	$-\frac{[pab]}{[paa]}$
$[pbl \cdot 1]_1$	$[pbl \cdot 1]_2$	$[pbl \cdot 1]_3$	$[f_2 \cdot 1]$	$[\Sigma u_2 \cdot 1]$
$-\frac{[pbl \cdot 1]_1}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_2}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_3}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[\Sigma u_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$
$[pcl]_1$	$[pcl]_2$	$[pcl]_3$	f_3	Σu_3
$-\frac{[pac]}{[paa]} [pal]_1$	$-\frac{[pac]}{[paa]} [pal]_2$	$-\frac{[pac]}{[paa]} [pal]_3$	$-\frac{[pac]}{[paa]} f_1$	$-\frac{[pac]}{[paa]} \Sigma u_1$
$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pbl \cdot 1]_1$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pbl \cdot 1]_2$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pbl \cdot 1]_3$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \Sigma u_2 \cdot 1$
$[pcl \cdot 2]_1$	$[pcl \cdot 2]_2$	$[pcl \cdot 2]_3$	$[f_3 \cdot 2]$	$[\Sigma u_3 \cdot 2]$
$-\frac{[pcl \cdot 2]_1}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_2}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_3}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{[\Sigma u_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$
$-\frac{[pal]_1}{[paa]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_1}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_1}{[pcc \cdot 2]}$	0	$[f]$
$-\frac{[pac]}{[paa]} Q_{13}$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} Q_{13}$	Q_{13}	$-\frac{f_1}{[paa]} f_1$	$-\frac{f_1}{[paa]} \Sigma u_1$
$-\frac{[pab]}{[paa]} Q_{12}$	Q_{12}		$-\frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]$	$-\frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [\Sigma u_2 \cdot 1]$
Q_{11}			$-\frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} [f_3 \cdot 2]$	$-\frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} [\Sigma u_3 \cdot 2]$
$-\frac{[pal]_2}{[paa]}$	$-\frac{[pbl \cdot 1]_2}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pcl \cdot 2]_2}{[pcc \cdot 2]}$	$-\frac{1}{P_u}$	$-\frac{1}{P_u}$
$-\frac{[pac]}{[paa]} Q_{23}$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} Q_{23}$	Q_{23}		
$-\frac{[pab]}{[paa]} Q_{22}$	Q_{22}			
Q_{21}				

7	8	9	10	11
$-\frac{[pal]_3}{[paa]}$ $-\frac{[pac]}{[paa]} Q_{33}$ $-\frac{[pab]}{[paa]} Q_{32}$ Q_{31}	$-\frac{[pbl \cdot 1]_3}{[pbb \cdot 1]}$ $-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} Q_{33}$ Q_{32}	$-\frac{[pcl \cdot 2]_3}{[psc \cdot 2]}$ Q_{33}		

2.2.7. Оценка точности функций уравненных величин

В том случае, если возникает необходимость оценить какую-либо величину, связанную с уравненными значениями измеренных величин определенными функциональными зависимостями, т.е.

$$U = F(T_1, T_2, \dots, T_k). \quad (2.86)$$

Тогда

$$M_U = \mu \sqrt{\frac{1}{P_U}}.$$

Как мы видим, задача сводится к нахождению обратного веса функции. Выразим нашу функцию через приближенные значения t_1, t_2, \dots, t_k и поправки к ним $\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_k$

$$U = F(t_1 + \delta t_1; t_2 + \delta t_2; \dots; t_k + \delta t_k). \quad (2.87)$$

Разложим данную функцию в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми степенями разложения, получим

$$U = F(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k} \delta t_k$$

обозначим

Умножая равенства (2.90) на коэффициенты нормальных уравнений соответственно $[paa]$, $[pab]$, ... , $[pgg]$ и после преобразований вычислим значения φ_1 , φ_2 , ... , φ_k , которые подставим в (2.82), и получим

$$\frac{1}{P_u} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \dots + \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[pgg \cdot (k-1)]}. \quad (2.92)$$

Формула (2.92) позволяет вычислить обратный вес функции совместно с неизвестными, а также с весовыми коэффициентами в схеме Гаусса-Дулитля (табл. 3). Контрольной формулой вычисления обратного веса является следующее выражение

$$-\frac{1}{P_u} = [f] - \frac{f_1 \Sigma u_1}{[paa]} - \frac{[f_2 \cdot 1][\Sigma u_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} - \dots - \frac{[f_k \cdot (k-1)][\Sigma u_k \cdot (k-1)]}{[pgg \cdot (k-1)]}, \quad (2.93)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma u_1 &= [pas] - [pal] + f_1; \\ \Sigma u_2 &= [pbs] - [pbl] + f_2; \\ &\dots\dots\dots \\ \Sigma u_k &= [pgs] - [pgl] + f_k. \end{aligned} \quad (2.94)$$

2.3. Коррелятный способ уравнивания

2.3.1. Сущность коррелятного способа уравнивания

В коррелятном способе уравнивания значительную роль играют избыточные измерения. Для примера можно рассмотреть измерение углов в треугольнике. Для того, чтобы однозначно судить о величине углов треугольника, достаточно измерить два угла, а третий угол получить косвенным путем. Однако, в геодезической практике используется принцип избыточности измерений. О роли избыточных измерений отмечалось в п. 1.1. Поэтому, если в треугольнике измерить все три угла, то одно из измерений будет избыточным. В случае существования функциональной зависимости между определяемыми величинами, возникает условное уравнение. Для треугольника такое уравнение имеет вид

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ = 0, \quad (2.95)$$

где β_i - истинные значения углов треугольника.

При подстановке в равенство (2.95) измеренных значений, содержащих ошибки измерений, возникает угловая невязка w_β

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 - 180^\circ = w_\beta, \quad (2.96)$$

где β'_i - результаты измерений углов.

Для устранения невязки в результаты измерений необходимо ввести поправки v_i , т.е.

$$\beta'_1 + v_1 + \beta'_2 + v_2 + \beta'_3 + v_3 - 180^\circ = 0. \quad (2.97)$$

Подставив в равенство (2.97) измеренные значения, получим

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_\beta = 0. \quad (2.98)$$

Полученное уравнение называется условным уравнение поправок.

В общем случае условные уравнения можно представить в следующем виде

$$\varphi_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad (2.99)$$

где X_j - уравниваемые значения измеряемой величины;

$i = 1, 2, \dots, n$ - число всех измеренных величин;

$j = 1, 2, \dots, r$ - число избыточных измерений.

Замена уравниваемых значений в равенствах (2.99) на результаты измерений приводит к невязкам

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_r) = w_j, \quad (2.100)$$

где x_i - результаты измерений.

Таким образом, наличие избыточных измерений приводит к условным уравнениям. Одно избыточное измерение дает нам одно условное уравнение. Дальнейшее уравнивание осуществляется путем минимизации функции $[pvv]$ с использованием дополнительных параметров по методу Лагранжа.

2.3.2 Теория коррелятного уравнивания

Предположим, что измеренные величины X_1, X_2, \dots, X_n , связанных условными уравнениями

$$\begin{aligned}\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0; \\ \varphi_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0.\end{aligned}\tag{2.101}$$

В процессе измерений получены следующие результаты неравноточных измерений x_1, x_2, \dots, x_n с соответствующими весами p_1, p_2, \dots, p_n . При наличии избыточных измерений получим систему условных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_1; \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_2; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_r.\end{aligned}\tag{2.102}$$

Чтобы исключить невязку, необходимо в результаты измерений внести поправки, при которых правые части системы условных уравнений обращаются в нули, т.е.

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0; \\ \varphi_2(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0.\end{aligned}\tag{2.103}$$

При введении поправок в результаты измерений получают уравненные значения измеренных величин (2.12)

Наилучшими являются поправки, удовлетворяющие принципу наименьших квадратов (2.1). Для нахождения поправок уравнения системы приведем к линейному виду, разложив равенства (2.103) в ряд Тейлора и ограничиваясь в виду малости ошибок измерений первыми степенями разложения. В результате получим

Введем обозначения:

и согласно (2.100) $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = w_i$.

Таким образом получим следующую системы уравнений

Полученные уравнения системы (2.105) называются условными уравнениями поправок в линейном виде. В символах Гаусса эта система имеет вид:

Поскольку в системе (2.105) количество неизвестных превышает число уравнений $n > r$, следовательно данная система имеет неопределенное решение. Для того, чтобы исключить неопределенность при решении, необходимо использовать условие принципа наименьших квадратов (2.1)

где K_j - неопределенные множители Лагранжа, называемые коррелатами.

Исследуя данную функцию на экстремум, необходимо определить ее первую производную и приравнять к нулю

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} &= 2p_1v_1 - 2a_1K_1 - 2b_1K_2 - \dots - 2g_1K_r = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} &= 2p_2v_2 - 2a_2K_1 - 2b_2K_2 - \dots - 2g_2K_r = 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} &= 2p_nv_n - 2a_nK_1 - 2b_nK_2 - \dots - 2g_nK_r = 0.\end{aligned}$$

Откуда получим

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{1}{p_1}(a_1K_1 + b_1K_2 + \dots + g_1K_r); \\ v_2 &= \frac{1}{p_2}(a_2K_1 + b_2K_2 + \dots + g_2K_r); \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= \frac{1}{p_n}(a_nK_1 + b_nK_2 + \dots + g_nK_r).\end{aligned}\tag{2.107}$$

Обозначим $\frac{1}{p_i} = q_i$

$$\begin{aligned}v_1 &= q_1(a_1K_1 + b_1K_2 + \dots + g_1K_r); \\ v_2 &= q_2(a_2K_1 + b_2K_2 + \dots + g_2K_r); \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= q_n(a_nK_1 + b_nK_2 + \dots + g_nK_r).\end{aligned}\tag{2.108}$$

Выражения системы (2.107) и (2.108) являются коррелятными уравнениями.

Умножим уравнения системы (2.108) соответственно на a_1, a_2, \dots, a_n и в результате сложения получим

$$[av] = [qaa]K_1 + [qab]K_2 + \dots + [qag]K_r.$$

Аналогично при умножении на b_i, \dots, g_i с учетом равенств (2.106) будем иметь систему нормальных уравнений коррелат

Решение нормальных уравнений коррелат способом последовательного исключения неизвестных выполняется согласно схеме Гаусса-Дулитля (табл. 5). Рассмотрим вариант для системы, состоящей из трех нормальных уравнений коррелат

$$\begin{aligned} [qaa]K_1 + [qab]K_2 + [qac]K_3 + w_1 &= 0; \\ [qab]K_1 + [qbb]K_2 + [qbc]K_3 + w_2 &= 0; \\ [qac]K_1 + [qbc]K_2 + [qcc]K_3 + w_r &= 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

В процессе решения нормальных уравнений в схеме Гаусса выполняется контроль в соответствующих строках (табл. 5). По завершению решения системы производится контроль правильности нахождения неизвестных подстановкой их значений в суммарное уравнение.

Контроль по $[p_{vv}]$ производится как в схеме решения Гаусса, так и при вычислении коэффициентов нормальных уравнений. Рассмотрим равенства (2.107)

$$v_i = \frac{1}{p_i}(a_i K_1 + b_i K_2 + \dots + g_i K_r),$$

которые умножим на $p_i v_i$. В результате сложения получим

$$[p v v] = [a v] K_1 + [b v] K_2 + \dots + [g v] K_r.$$

Согласно (2.106) получаем следующее равенство

$$[pvv] = -K_1 w_1 - K_2 w_2 - \dots - K_r w_r = -[Kw]. \quad (2.118)$$

Для получения контрольной формулы за основу возьмем систему нормальных уравнений (2.109) и к ней добавим равенство (2.118)

$$\begin{aligned} &[qaa]K_1 + [qab]K_2 + \dots + [qag]K_r + w_1 = 0; \\ &[qab]K_1 + [qbb]K_2 + \dots + [qbg]K_r + w_2 = 0; \\ &\dots\dots\dots \\ &[qag]K_1 + [qbg]K_2 + \dots + [qgg]K_r + w_r = 0; \\ &K_1w_1 + K_2w_2 + \dots + K_rw_r + w_{r+1} = -[pvv] \end{aligned}$$

Решение данной системы приводит к ее эквивалентному виду:

Таблица 5

Схема решения нормальных уравнений коррелат

K_1	K_2	K_3	w	s	Контроль
1	2	3	4	5	6
$[qaa]$	$[qab]$	$[qac]$	w_1	S_1	Σ_1
-1	$-\frac{[qab]}{[qaa]}$	$-\frac{[qac]}{[qaa]}$	$-\frac{w_1}{[qaa]}$	$-\frac{S_1}{[qaa]}$	$-\frac{\Sigma_1}{[paa]}$
	$[qbb]$	$[qbc]$	w_2	S_2	Σ_2
	$-\frac{[qab]}{[qaa]}[qab]$	$-\frac{[qab]}{[qaa]}[qac]$	$-\frac{[qab]}{[qaa]}w_1$	$-\frac{[qab]}{[qaa]}S_1$	$-\frac{[qab]}{[qaa]}\Sigma_1$
	$[qbb \cdot 1]$	$[qbc \cdot 1]$	$[w_2 \cdot 1]$	$[S_2 \cdot 1]$	$[\Sigma_2 \cdot 1]$
	-1	$-\frac{[qbc \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}$	$-\frac{[w_2 \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}$	$-\frac{[S_2 \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}$	$-\frac{[\Sigma_2 \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}$
		$[qcc]$	w_3	S_3	Σ_3
		$-\frac{[qac]}{[qaa]}[qac]$	$-\frac{[qac]}{[qaa]}w_1$	$-\frac{[qac]}{[qaa]}S_1$	$-\frac{[qac]}{[qaa]}\Sigma_1$
		$-\frac{[qbc \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}[qbc \cdot 1]$	$-\frac{[qbc \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}[w_2 \cdot 1]$	$-\frac{[qbc \cdot 1]}{[pqbb \cdot 1]}[S_2 \cdot 1]$	$-\frac{[qbc \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}[\Sigma_2 \cdot 1]$
		$[qcc \cdot 2]$	$[w_3 \cdot 2]$	$[S_3 \cdot 2]$	$[\Sigma_3 \cdot 2]$
		-1	$-\frac{[w_3 \cdot 2]}{[qcc \cdot 2]}$	$-\frac{[S_3 \cdot 2]}{[qcc \cdot 2]}$	$-\frac{[\Sigma_3 \cdot 2]}{[qcc \cdot 1]}$
$-\frac{w_1}{[qaa]}$	$-\frac{[w_2 \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}$	$-\frac{[w_3 \cdot 2]}{[qcc \cdot 2]}$	$-\frac{w_1^2}{[qaa]}$		
$-\frac{[qac]}{[qaa]} K_3$	$-\frac{[qbc \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]} K_3$	K_3	$-\frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]}$		
$-\frac{[qab]}{[qaa]} K_2$	K_2		$-\frac{[w_3 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]}$		
K_1			$-[p_{vv}]$		

$$[qaa]K_1 + [qab]K_2 + \dots + [qag]K_r + w_1 = 0;$$

$$[qbb \cdot 1]K_2 + \dots + [qbg \cdot 1]K_r + [w_2 \cdot 1] = 0;$$

.....

$$[qgg \cdot (r-1)]K_r + [w_r \cdot (r-1)] = 0;$$

$$[w_{r+1} \cdot r] = -[p_{vv}]$$

(2.119)

Из последнего уравнения системы (2.119) согласно раскрытию символов Гаусса имеем

$$-[pvv] = \frac{w_1^2}{[qaa]} + \frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[qab]} + \dots + \frac{[w_r \cdot (r-1)]^2}{[qgg \cdot (r-1)]}. \quad (2.120)$$

2.3.4. Оценка точности по материалам коррелятного уравнивания

По результатам уравнительных вычислений производится оценка точности как самих измерений, так и уравненных величин. Кроме того возникает задача оценить точность какого-либо значения, вычисленного через уравненные величины.

Составим функциональную зависимость между определяемой величиной и уравненными значениями

$$U = F(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.121)$$

Средняя квадратическая ошибка такой функции определится согласно (2.54)

$$M_U = \mu \sqrt{\frac{1}{P_U}}.$$

Ошибка единицы веса равна

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}. \quad (2.122)$$

Поскольку $X_i = x_i + v_i$, функция (2.121) примет вид

$$U = F(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n). \quad (2.123)$$

Для приведения к линейному виду разложим функцию (2.123) в ряд Тейлора

$$U = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} v_n,$$

а если введем обозначения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i,$$

то получим

$$U = f_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n. \quad (2.124)$$

Если в равенство (2.124) вместо поправок подставить их значения из уравнений коррелат (2.107), получим следующее выражение нашей функции

$$U = f_0 + \frac{f_1}{p_1}(a_1K_1 + b_1K_2 + \dots + g_1K_r) +$$
$$+ \frac{f_2}{p_2}(a_2K_1 + b_2K_2 + \dots + g_2K_r) +$$
$$\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{f_n}{p_n}(a_nK_1 + b_nK_2 + \dots + g_nK_r).$$

Группируя относительно коррелат, получим следующее выражение функции

$$U = f_0 + \left[\frac{af}{p} \right] K_1 + \left[\frac{bf}{p} \right] K_2 + \dots + \left[\frac{gf}{p} \right] K_r. \quad (2.125)$$

Присоединив полученное выражение к системе нормальных уравнений коррелат и введя неопределенные множители $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$, после соответствующих преобразований определим обратный вес функции U

$$\frac{1}{P_U} = [qff] + [qaf]\rho_1 + [qbf]\rho_2 + \dots + [qgf]\rho_r. \quad (2.126)$$

Из решения системы нормальных уравнений для неопределенных мно-
жителей

$$\begin{aligned} & [qaa]\rho_1 + [qab]\rho_2 + \dots + [qag]\rho_r + [qaf] = 0; \\ & [qab]\rho_1 + [qbb]\rho_2 + \dots + [qbg]\rho_r + [qbf] = 0; \\ & \dots\dots\dots \\ & [qag]\rho_1 + [qbg]\rho_2 + \dots + [qgg]\rho_r + [qgf] = 0. \end{aligned}$$

находим неопределенные множители $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ и, подставив их значения в выражение (1.126), получим

$$\frac{1}{P_{ii}} = [qff] - \frac{[qaf]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} - \dots - \frac{[qgf \cdot (r-1)]^2}{[qgg \cdot (r-1)]}. \quad (2.127)$$

Для контроля правильности вычисления обратного веса функции используется контрольная формула

$$\frac{1}{P_v} = [qf\Sigma_v] - \frac{[qaf]}{[qaa]}[qa\Sigma_v] - \frac{[qbf \cdot 1]}{[qbb \cdot 1]}[qb\Sigma_v \cdot 1] - \dots - \frac{[qgf \cdot (r-1)]^2}{[qgg \cdot (r-1)]}[qg\Sigma_v \cdot (r-1)].$$

3. ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

3.1. Способ прямой угловой засечки

Способы нахождения координат отдельных точек измерением параметров, связывающих положение определяемых точек с исходными пунктами. Для определения планового положения точки необходимо измерить два элемента. Засечки подразделяются на прямые (рис. 2, а, з), обратные (рис. 2, б, д) и комбинированные (рис. 2, в).

По способу измерений засечки подразделяют на угловые (рис. 2 а, б, в), линейные (рис. 2, з), линейно-угловые (рис. 2, д). Использование линейно-угловых построений, где имеются как угловые, так и линейные измерения, позволяют не только уменьшить количество станций, но и число избыточных измерений. Широкое использование современных геодезических электронных приборов позволило использовать способы линейно-угловых засечек при создании планового геодезического обоснования.

Способ прямой угловой засечки заключается в том, что для определения положения точки P от базовых направлений AB и BA измеряются углы β_1 и β_2 (рис. 3). Для решения данной задачи рассмотрим треугольник APB . В данном треугольнике исходными данными будут: координаты $X_A, Y_A; X_B, Y_B$ точек A и B . Решая обратную геодезическую задачу, по координатам точек A и B определяем дирекционный угол α_{AB} и длину b линии AB .

Согласно теореме синусов

$$\frac{b}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{S}{\sin \beta_1} = \frac{S_1}{\sin \beta_2} \quad (3.1)$$

вычислим длины сторон S и S_1 . Определив дирекционные углы α_{AP} и α_{BP} по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{AP} &= \alpha_{AB} + 360^\circ - \beta_1; \\ \alpha_{BP} &= \alpha_{BA} - 360^\circ + \beta_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

решая прямую геодезическую задачу, найдем координаты точки P .

$$X_P = X_A + S_1 \cdot \cos \alpha_{AP}; \quad Y_P = Y_A + S_1 \cdot \sin \alpha_{AP}. \quad (3.3)$$

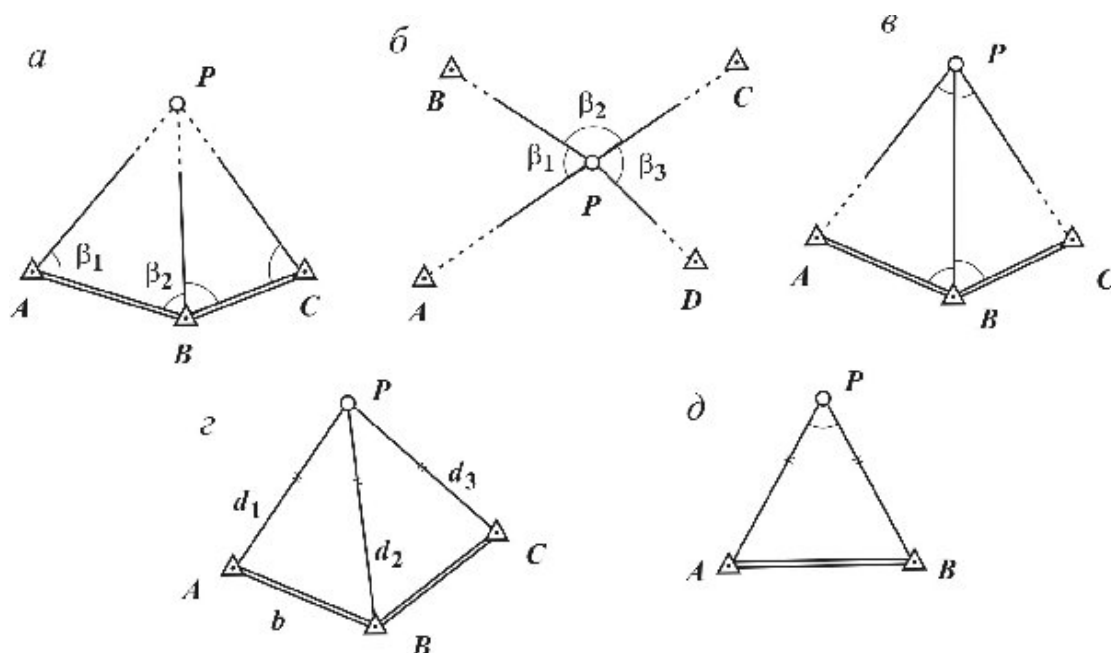


Рис. 2. Схемы засечек:

a – прямая угловая; *б* – обратная угловая; *в* – комбинированная угловая;
г – линейная; *д* – линейно-угловая

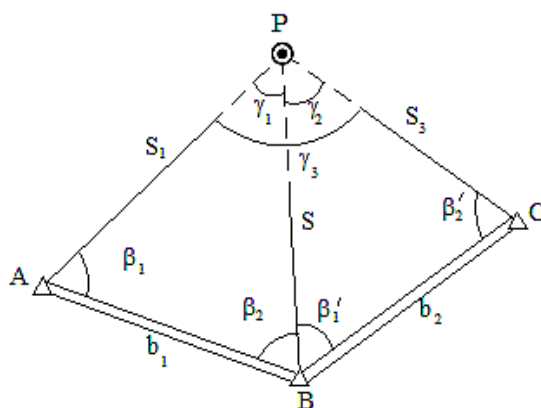


Рис. 3. Прямая угловая засечка

Контроль получения координат определяемой точки P осуществляется с помощью решения треугольника BPC .

Для вычисления координат X_P и Y_P можно использовать формулы Юнга

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{X_A \operatorname{ctg} \beta_2 + X_B \operatorname{ctg} \beta_1 + (Y_B - Y_A)}{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2}; \\ Y_P &= \frac{Y_A \operatorname{ctg} \beta_2 + Y_B \operatorname{ctg} \beta_1 - (X_B - X_A)}{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Средняя квадратическая ошибка положения точки P относительно исходных пунктов определяется согласно формуле

$$M_P = \frac{m_\beta b_1}{\rho \sin^2(\beta_1 + \beta_2)} \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2} \quad (3.5)$$

или

$$M_P = \frac{m_\beta}{\rho \sin(\beta_1 + \beta_2)} \sqrt{S^2 + S_1^2}. \quad (3.6)$$

В случае отсутствия прямой видимости между исходными пунктами можно использовать формулы Гаусса (рис. 4). Определяют дирекционные углы примычных направлений на исходные пункты. После этого вычисляют дирекционные углы для трех направлений на определяемую точку P . Координаты точки P вычисляют согласно формулам:

$$X_P = \frac{X_A \operatorname{tg} \alpha_{AP} - X_B \operatorname{tg} \alpha_{BP} + (Y_B - Y_A)}{\operatorname{tg} \alpha_{AP} - \operatorname{tg} \alpha_{BP}}; \quad (3.7)$$

$$Y_P = Y_A + (X_P - X_A) \operatorname{tg} \alpha_{AP} = Y_B + (X_P - X_B) \operatorname{tg} \alpha_{BP}; \quad (3.8)$$

и

$$Y_P = \frac{Y_A \operatorname{ctg} \alpha_{AP} - Y_B \operatorname{ctg} \alpha_{BP} + (X_B - X_A)}{\operatorname{ctg} \alpha_{AP} - \operatorname{ctg} \alpha_{BP}}; \quad (3.9)$$

$$X_P = X_A + (Y_P - Y_A) \operatorname{ctg} \alpha_{AP} = X_B + (Y_P - Y_B) \operatorname{ctg} \alpha_{BP}. \quad (3.10)$$

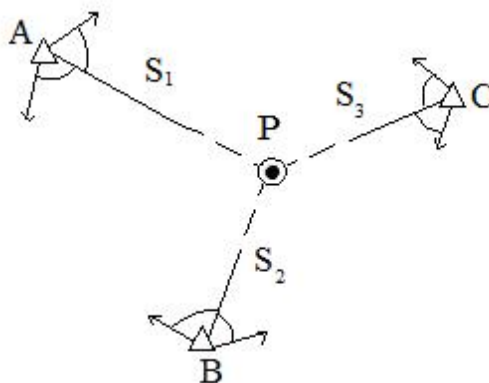


Рис. 4. Отсутствие прямой видимости на исходные пункты

3.2. Способ линейной засечки

Использование в геодезической практике светодальномеров и электронных тахеометров позволяет определять положение точки линейными засечка-

ми (рис. 5). С этой целью измеряют расстояние от точки P до ближайших исходных пунктов A и B , расстояние между которыми известно или может быть определено по координатам этих пунктов [2].

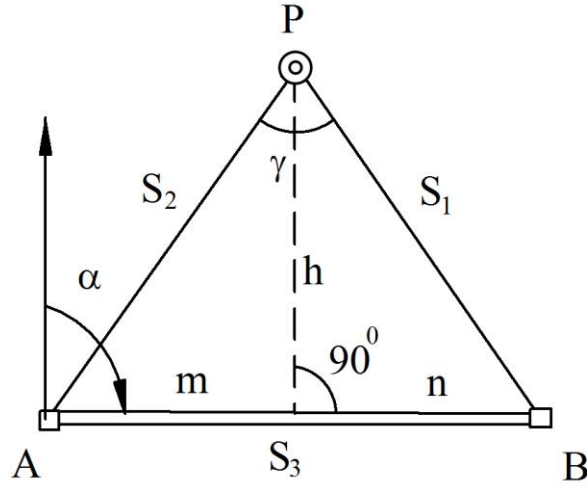


Рис. 5. Схема линейной засечки

Решая треугольник ABP , в котором известны три его стороны S_1 , S_2 и S_3 , можно определить все три его угла; например, из формулы

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3 \cos A$$

следует, что

$$\cos A = \frac{S_2^2 + S_3^2 - S_1^2}{2S_2S_3}. \quad (3.12)$$

Сумма трех вычисленных углов должна равняться 180° , что служит контролем правильности их вычисления. Имея в треугольнике ABP известные углы и стороны, можно, применяя формулы Юнга (3.4), вычислить координаты X_P и Y_P . В целях контроля вычисления координат точки P линейную засечку выполняют построением не одного, а двух треугольников; при этом должен быть использован третий исходный пункт, до которого может быть измерено расстояние от точки P . Погрешность положения точки P из однократной линейной засечки определяют по формуле

$$M_{P_1} = \frac{m_s}{S \cdot \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad (3.13)$$

где $\frac{m_S}{S}$ - относительная погрешность измерения линий;

γ - угол засечки при определяемой точке.

3.3. Способ обратной угловой засечки

Обратной угловой засечкой является задача определения положения точки P путем измерения углов на ней. При определении точки обратной засечкой с определяемой точки должно быть измерено не менее четырех направлений на исходные пункты (рис. 6).

Точность определения точки обратной засечкой в большой степени зависит от расположения определяемой точки P относительно исходных пунктов, поэтому нужно отбрасывать те комбинации, в которых определяемая точка лежит вблизи окружности, проходящей через исходные пункты.

Для вычисления дирекционного угла исходного направления можно использовать формулу Деламбера:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(Y_2 - Y_1) \operatorname{ctg} \gamma_1 + (Y_1 - Y_3) \operatorname{ctg} \gamma_2 + X_3 - X_2}{(X_2 - X_1) \operatorname{ctg} \gamma_1 + (X_1 - X_3) \operatorname{ctg} \gamma_2 + Y_2 - Y_3}; \quad (3.14)$$

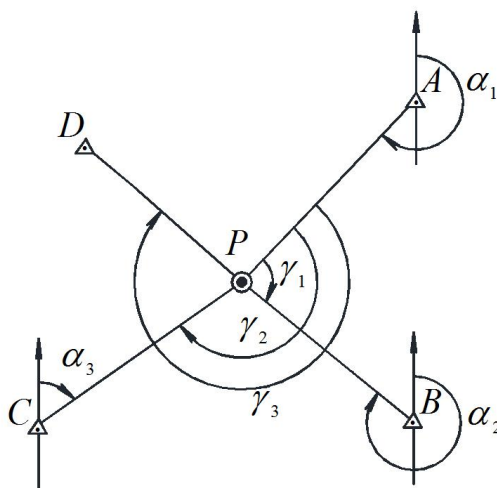


Рис. 6. Обратная угловая засечка

Дирекционные углы направлений BP , CP , DP вычисляют согласно формулам:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma; \alpha_3 = \alpha_1 + \gamma_2; \alpha_3 = \alpha_1 + \gamma_3.$$

Координаты определяемой точки P по формулам Гаусса (3.7) - (3.8).

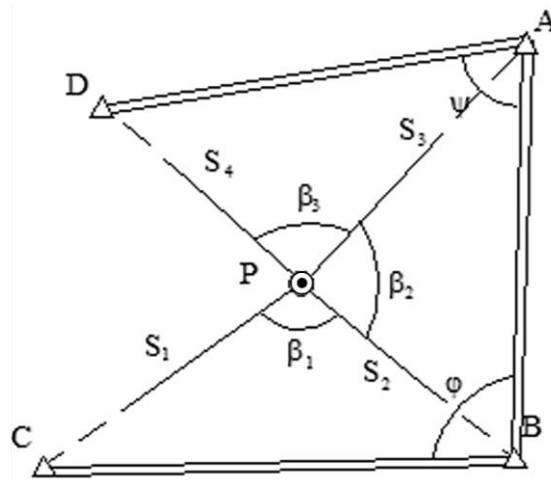


Рис. 7. Схема определения координат точки P по трем исходным пунктам и двум измеренным углам

Координаты определяемой точки P по трем исходным пунктам A , B , C и измеренным углам β_1 и β_2 вычисляют по формулам И. Ю. Пранис-Праневича. Для контроля измеряют третий угол β_3 .

Используемые формулы:

$$tg\Theta = \frac{(Y_2 - Y_1)ctg\beta_1 - (Y_3 - Y_2)ctg\beta_2 + (X_1 - X_3)}{(X_2 - X_1)ctg\beta_1 - (X_3 - X_2)ctg\beta_2 - (Y_1 - Y_3)}; \quad (3.15)$$

$$N_1 = (Y_2 - Y_1)(ctg\beta_1 - tg\Theta) - (X_2 - X_1)(1 + ctg\beta_1 tg\Theta); \quad (3.16)$$

$$N_2 = (Y_3 - Y_2)(ctg\beta_2 + tg\Theta) + (X_3 - X_2)(1 - ctg\beta_2 tg\Theta). \quad (3.17)$$

В дальнейшем используют среднее значение $N = 0,5(N_1 + N_2)$.

$$\Delta X_2 = \frac{1}{(1 + tg^2\Theta)}; \quad X_P = X_B + \Delta X_2. \quad (3.18)$$

$$\Delta Y_2 = \Delta X_2 \cdot tg\Theta; \quad Y_P = Y_B + \Delta Y_2. \quad (3.19)$$

Средняя квадратическая ошибка определения положения точки P определяют по формулам:

$$M_{P_1} = \frac{S_2 \cdot m_\beta}{\rho \cdot \sin(\varphi + \beta_1 + \beta_2)} \sqrt{\left(\frac{S_1}{AB}\right)^2 + \left(\frac{S_3}{BC}\right)^2}; \quad (3.20)$$

и

$$M_{P_2} = \frac{S_3 \cdot m_\beta}{\rho \cdot \sin(\psi + \beta_2 + \beta_3)} \sqrt{\left(\frac{S_2}{BC}\right)^2 + \left(\frac{S_4}{CD}\right)^2}, \quad (3.21)$$

где φ и ψ - углы между исходными сторонами;

S_1, S_2, S_3, S_4 - расстояния между определяемой точкой и исходными пунктами;

AB, BC, CD - расстояния между исходными пунктами.

Общую погрешность положения точки P находят по формуле

$$M_P = \frac{M_{P_1} \cdot M_{P_2}}{\sqrt{M_{P_1}^2 + M_{P_2}^2}}. \quad (3.22)$$

Предположим, измеряется угол β на определяемой точке P между направлениями на два пункта AB с известными координатами X_A, Y_A и X_B, Y_B . Проведем окружность через имеющиеся точки A, B и P . В этом случае измеренный угол β будет равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, угол при точке Π , опирающийся на эту дугу, является центральным и будет равен 2β (рис. 8). Из решения обратной геодезической задачи определим расстояние b между пунктами A и B . Радиус R окружности находим из прямоугольного треугольника $F\Pi B$:

$$R = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta}. \quad (3.23)$$

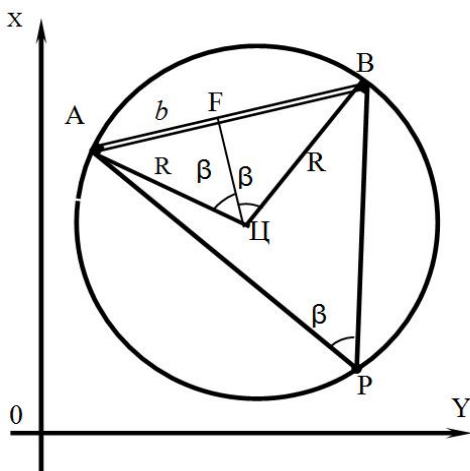


Рис. 8. К вычислению R и координат точки Π

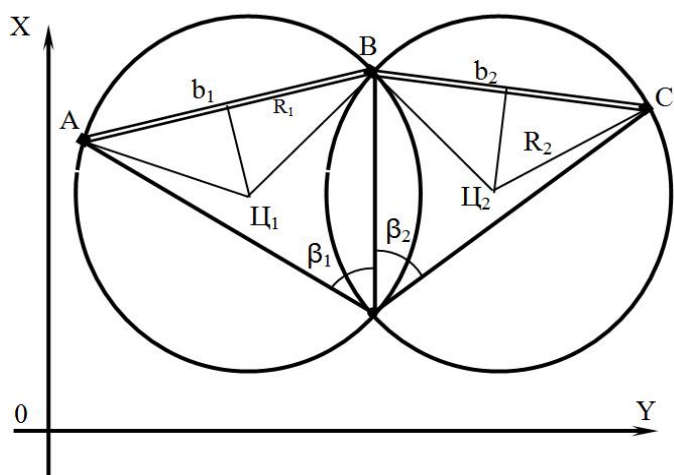


Рис. 9. Обратная угловая засечка

Уравнение окружности имеет вид:

$$(X - X_C)^2 + (Y - Y_C)^2 = R^2, \quad (3.24)$$

где X_C , Y_C - координаты центра окружности. Их можно вычислить, решив либо прямую угловую, либо линейную засечку с пунктов A и B на точку C .

Для однозначного определения координат искомой точки P недостаточно уравнения (3.24). Поэтому воспользуемся нахождением координат точки P по двум измеренным углам β_1 и β_2 в точке P на три пункта A , B и C (рис. 9).

Определим радиусы окружностей R_1 и R_2

$$R_1 = \frac{b_1}{2\sin\beta_1}; \quad R_2 = \frac{b_2}{2\sin\beta_2}. \quad (3.25)$$

Вычислим координаты центров окружностей. В дальнейшем координаты точки P можно определить по формулам линейной засечки (3.4).

3.4. Задача Ганзена

Задача по определению координат двух точек C и D по двум исходным пунктам A и B возникает обычно при привязке полигонометрических ходов на застроенной территории, когда исходные пункты закреплены стенными знаками.

Для решения задачи измеряют углы β , γ и δ (рис. 10). Выбор мест определяемых точек следует производить так, чтобы в треугольниках, образованных наблюдаемыми направлениями и исходной стороной AB , не было слишком острых углов (менее 30°). Длина линии CD должна составлять не менее $0,5AB$.

Один из многочисленных вариантов решения задачи предусматривает использование следующих рабочих формул:

$$ctg\varepsilon = \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin\alpha \cdot \sin\delta \cdot \sin(\beta + \delta + \gamma) \cdot \sin(\beta + \delta)} + ctg(\beta + \delta); \quad (3.26)$$

$$ctg\psi = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\delta \cdot \sin(\beta + \delta + \gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \delta) \cdot \sin(\beta + \delta)} + ctg(\beta + \delta). \quad (3.27)$$

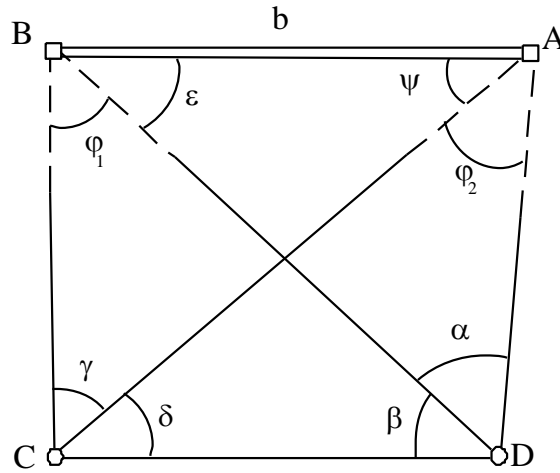


Рис. 10. Схема задачи Ганзена

Контроль: $\varepsilon + \psi = \beta + \delta$. Расхождения в суммах не должны превышать $0,1'$. По измеренным углам вычисляют углы

$$\varphi_1 = 180^\circ - (\beta + \delta + \gamma);$$

$$\varphi_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta + \delta).$$

С учетом значений ε и ψ , решают прямые геодезические засечки по формулам Юнга (3.4). Контролем правильности вычислений является решение по формулам Гаусса (3.7)-(3.8).

Точность определения положения точек C и D составит:

$$M_c = \frac{m_\gamma \cdot b}{\rho \cdot \sin^2 \gamma} \sqrt{\sin^2 \psi + \sin^2 (\varepsilon + \varphi_1)}; \quad (3.28)$$

$$M_d = \frac{m_\alpha \cdot b}{\rho \cdot \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin^2 \varepsilon + \sin^2 (\psi + \varphi_2)}. \quad (3.29)$$

3.5. Линейно-угловой ход

3.5.1. Вычисление координат пунктов линейно-углового хода

Определяем количество пунктов хода с неизвестными координатами X и Y , которые необходимо найти. Общее число пунктов составит n , а число принятых неизвестных - $2(n - 2)$. Общее количество измерений в разомкнутом ходе составит $(2n - 1)$ согласно рисунку 11. Число избыточных измерений будет равна:

$$(2n - 1) - 2(n - 2) = 3.$$

Каждое избыточное измерение дает одно условное уравнение. Следовательно в разомкнутом линейно-угловом ходе выполняются следующие условия: дирекционных углов и условия абсцисс и ординат.

Вычисление дирекционных углов сторон хода выполняется по следующей формуле:

$$\alpha_{\kappa} = \alpha_{\text{н}} + \sum \beta - 180^{\circ} \cdot n, \quad (3.29)$$

а теоретическая сумма всех левых по ходу углов составит

$$\sum \beta_{\text{теор}} = \alpha_{\kappa} - \alpha_{\text{н}} + 180^{\circ} \cdot n. \quad (3.30)$$

Для правых углов хода:

$$\sum \beta_{\text{теор}} = \alpha_{\text{н}} - \alpha_{\kappa} + 180^{\circ} \cdot n. \quad (3.31)$$

Разность между суммой измеренных углов и теоретической является угловой невязкой:

$$f_{\beta} = \sum \beta_{\text{изм}} - \sum \beta_{\text{теор}}. \quad (3.32)$$

Полученное значение угловой невязки не должно превышать допустимой величины, вычисленной по формуле

$$f_{\beta_{\text{дон}}} = 2 \cdot m_{\beta} \cdot \sqrt{n}. \quad (3.33)$$

Целью уравнивания является нахождение поправок в измеренные значения углов в соответствие с возникшими условиями. Поправки $v_{\beta i}$ в измеренные углы в сумме должны равнять невязке с обратным знаком:

$$\sum v_{\beta i} = -f_{\beta}. \quad (3.34)$$

Приближенный способ уравнивания заключается в введении поправок поровну во все измеренные углы, т.е.

$$v_{\beta} = -\frac{f_{\beta}}{n}. \quad (3.35)$$

Исправленные значения углов вычисляются по формуле:

$$\beta_i = \beta_{i(\text{изм})} + v_{\beta}. \quad (3.36)$$

По исправленным углам вычисляются дирекционные углы всех сторон хода. Контролем является получение значения исходного дирекционного конечной стороны.

Координаты пунктов хода определим согласно формулам:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= X_{нач}; & Y_1 &= Y_{нач}; \\
 X_2 &= X_1 + \Delta X_1; & Y_2 &= Y_1 + \Delta Y_1; \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\
 X_{n-1} &= X_{n-2} + \Delta X_{n-2}; & Y_{n-1} &= Y_{n-2} + \Delta Y_{n-2}; \\
 X_{кон} &= X_{n-1} + \Delta X_{n-1}; & Y_{кон} &= Y_{n-1} + \Delta Y_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

В результате получаем невязки по приращениям координат вследствие ошибок, возникающих при измерении сторон хода и приближенного уравнивания углов:

$$\begin{aligned}
 f_x &= \sum \Delta X_{изм} - \sum \Delta X_{теор}; \\
 f_y &= \sum \Delta Y_{изм} - \sum \Delta Y_{теор}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Абсолютная невязка вычисляет:

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \tag{3.39}$$

Относительная невязка хода составит:

$$\frac{1}{N} = \frac{f_s}{P}, \tag{3.40}$$

где P – периметр замкнутого хода или суммарная длина разомкнутого хода.

Поправки в вычисленные значения превышений находят пропорционально длинам сторон

$$V_{yi} = \frac{f_y}{P} \cdot S_i; \quad V_{xi} = \frac{f_x}{P} \cdot S_i. \tag{3.41}$$

По исправленным значениям приращений вычисляются координаты пунктов линейно-углового хода.

Отличием обработки замкнутого хода является определение теоретических сумм углов и приращений координат. В замкнутом ходе при измерении правых углов по ходу теоретическая сумма углов вычисляется согласно:

$$\Sigma \beta_{теор} = 180^\circ \cdot (n - 2) \quad (3.42)$$

и

$$\Sigma \Delta X = 0; \quad \Sigma \Delta Y = 0.$$

3.5.2. Привязка линейно-угловых ходов

Привязкой линейно-углового хода является включение в него одного или нескольких пунктов с известными координатами. На начальном и конечном пунктах хода измеряются примычные углы.

В случае привязки к недоступному геодезическому пункту теодолит устанавливают произвольно (точка Р). При этом возникает задача по перенесению координат с вершины знака на землю. Измеряются базисы b_1 и b_2 , а также измеряют углы β_1, β_2, δ и $\beta'_1, \beta'_2, \delta'$ (рис. 11).

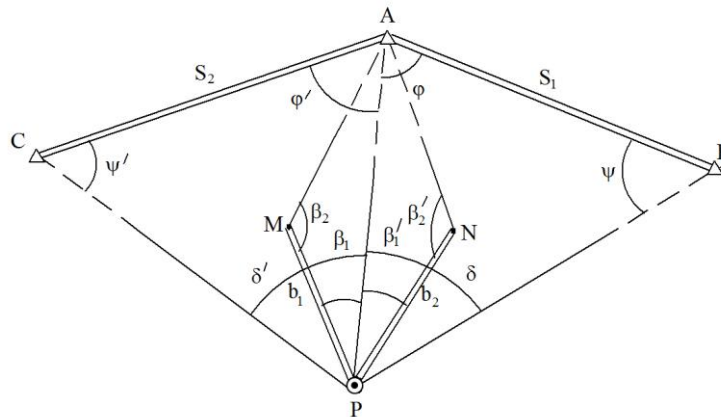


Рис. 11. Схема снесения координат с вершины знака на землю

Решая обратную геодезическую задачу, вычисляют расстояния S_1 и S_2 и дирекционные углы α_{AB} и α_{AC} . Затем находят расстояние AP из решения треугольников AMP и ANP согласно формулам

$$AP = d_1 = \frac{b_1 \sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}; \quad AP = d_2 = \frac{b_2 \sin \beta'_2}{\sin(\beta'_1 + \beta'_2)}. \quad (3.43)$$

Если расхождение между полученными значениями не превышает допустимой величины, тогда вычисляют среднее значение

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}. \quad (3.44)$$

Для нахождения примычных углов φ и φ' вычислим значения углов ψ и ψ'

$$\sin \psi = \frac{d \sin \delta}{S_1}; \quad \sin \psi' = \frac{d \sin \delta'}{S_2}. \quad (3.45)$$

По полученным значениям примычных углов вычислим дирекционный угол α_{AP} линии AP относительно направлений AB и BC .

Вычисляем координаты точки P по формулам

$$X_P = X_A + d \cdot \cos \alpha_{AP}; \quad Y_P = Y_A + d \cdot \sin \alpha_{AP}. \quad (3.46)$$

Средняя квадратическая ошибка определения положения точки P вычисляется по формуле

$$M_P = d \sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2}, \quad (3.47)$$

где m_b – средняя квадратическая ошибка определения базиса;

m_β – средняя квадратическая ошибка измерения угла.

4. УРАВНИВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ХОДОВ И СЕТЕЙ

4.1. Постановка задачи уравнивания

Определим число избыточных измерений в полигонометрическом ходе (рис. 12), опирающемся на исходные пункты T_H и T_K и исходные дирекционные углы α_H и α_K :

$$r = n - k, \quad (4.1)$$

где n - число всех измерений;

k - число необходимых измерений (число неизвестных).

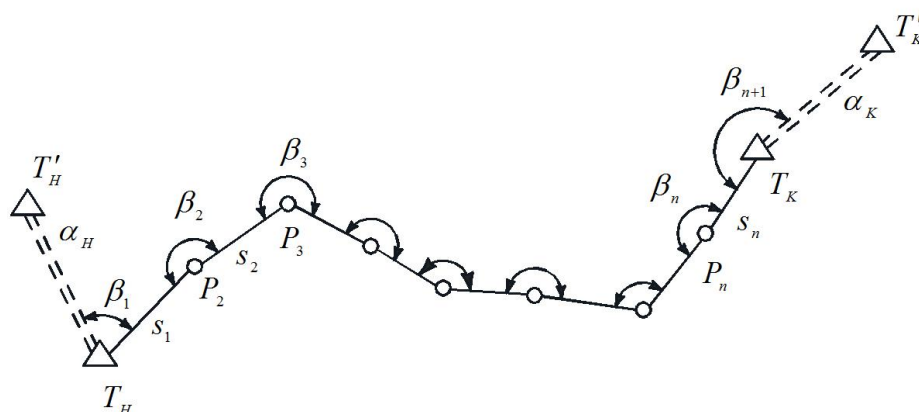


Рис. 12. Разомкнутый и одиночный полигонометрический ход

В разомкнутом полигонометрическом ходе измеряют n сторон и $n + 1$ углов. Тогда

$$r = 2n + 1 - 2(n - 1) = 3. \quad (4.2)$$

Способы уравнивания делятся на строгие, когда уравнивание производится согласно принципу наименьших квадратов, т.е.

$$[pvv] = \min ,$$

и нестрогие или отдельные, когда поправки в измеренные углы и вычисленные приращения координат вводят отдельно, не смотря на их функциональную зависимость.

4.2. Предварительный анализ результатов полевых измерений

Камеральная обработка результатов измерений выполняется в два этапа:

- предварительная обработка;
- уравнивательные вычисления.

В горизонтальные проложения вводят поправки Δs_y для получения линий в проекции Гаусса

$$\Delta s_y = \frac{y_m^2}{2R_m^2} s', \quad (4.3)$$

где y_m - средняя ордината или среднее расстояние линии от осевого меридиана;

R_m -средний радиус шара, равный 6371,11 км;

s' - длина линии, приведенная к горизонту.

Поправка за приведение к уровню моря вычисляется согласно формуле

$$\Delta s_H = -\frac{H_m}{R_m} \cdot s', \quad (4.4)$$

где H_m - средняя высота линии над уровнем моря.

Значения y_m и H_m определяют графическим способом по карте района работ.

Поправку за кривизну Земли $\delta_{1,2}$ вычисляют согласно формуле

$$\delta_{1,2} = -\frac{\rho}{2R_m^2} \cdot (x_2 - x_1) \cdot y_m. \quad (4.5)$$

При обработке хода, вычисляя приращения координат, получают невязки f_x и f_y , а не продольную t и поперечную u невязки (рис. 12). Эти значения можно определить по невязкам f_x и f_y .

Значения поперечной и продольной невязок вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} t &= f_x \cdot \cos \Theta + f_y \cdot \sin \Theta; \\ u &= f_y \cdot \cos \Theta - f_x \cdot \sin \Theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Определим угол поворота осей

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{[\Delta x]}{L}; \\ \sin \Theta &= \frac{[\Delta y]}{L}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Величину замыкающей L найдем из выражения

$$L = \sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}. \quad (4.8)$$

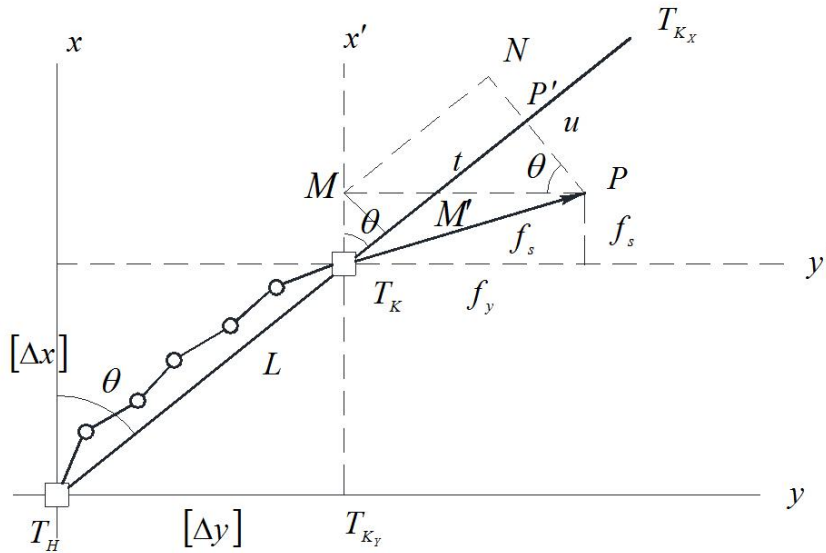


Рис. 13. Схема к определению продольной и поперечной невязки t и u

Относительные величины продольной и поперечной невязок составят

$$\frac{u}{L} = \frac{f_y [\Delta x] - f_x [\Delta y]}{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}, \quad \frac{t}{L} = \frac{f_x [\Delta x] + f_y [\Delta y]}{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}; \quad (4.9)$$

Предварительно производится оценку точности результатов измерений, и которая позволяет проверить правильность выполненных угловых и линейных измерений, а также соответствие точности произведенных работ.

Оценка точности измерения углов может выполняться:

- по отклонениям от арифметического среднего;
- по разностям двойных измерений;
- по значениям угловых невязок в полигонометрических ходах.

Средняя квадратическая ошибка измерения угла

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{[vv]}{k-1}}, \quad (4.10)$$

где v – отклонения от арифметической середины;

k – количество измерений измерения угла.

Средняя квадратическая ошибка среднего значения угла из числа k измерений составит

$$M_{\beta} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{k}}. \quad (4.11)$$

Средняя квадратическая ошибка измерения углов по невязкам в ходах x) вычисляется по формуле

$$M_{\beta} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_{\beta}^2}{n+1} \right]}{N}}. \quad (4.12)$$

Использование разностей двойных измерений позволяет определить в общем случае ошибку единицы веса μ , от которой можно перейти к оценке точности как результатов измерений, так и определяемых величин

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pdd]}{n}}, \quad (4.13)$$

где d_i – разности двойных измерений.

При наличии систематических ошибок в измерениях они исключаются из полученных результатов и тогда пользуются следующей формулой для нахождения ошибки единицы веса

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pd'd']}{n-1}}, \quad (4.14)$$

где d' - разности двойных измерений, в которых отсутствует систематическая составляющая d_0

$$d_0 = \frac{[d]}{n}, \quad (4.15)$$

где n – число разностей.

4.3. Строгое уравнивание полигонометрического хода параметрическим способом

Согласно параметрическому способу уравнивания определяются необходимые независимые неизвестные. В полигонометрических ходах такими неизвестными являются координаты определяемых пунктов

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + \delta x_i; \\ y_i &= y_0 + \delta y_i, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где x_i, y_i - уравненные значения координат;

x_0, y_0 - приближенные значения координат;

$\delta x_i, \delta y_i$ - искомые поправки.

Поскольку в полигонометрическом ходе измеряются углы поворота и линии, то и параметрические уравнения поправок составляются для двух групп:

- для всех измеренных углов;
- для всех измеренных линий.

Угол β на любом пункте A (рис. 14) может быть представлен в виде разности дирекционных углов его сторон

$$\beta_A = \alpha_{AP} - \alpha_{AB}. \quad (4.17)$$

Используя дифференциальную формулу дирекционного угла

$$d\alpha = -\frac{(a)}{s} dx_A - \frac{(b)}{s} dy_A + \frac{(a)}{s} dx_B + \frac{(b)}{s} dy_B, \quad (4.18)$$

можно получить из уравнения (4.18) уравнение поправок для угла

$$v_{\beta k} = - \left\{ \frac{(a)_{kj}}{s_{kj}} - \frac{(a)_{ki}}{s_{ki}} \right\} \delta x_k - \left\{ \frac{(b)_{kj}}{s_{kj}} - \frac{(b)_{ki}}{s_{ki}} \right\} \delta y_k + \frac{(a)_{kj}}{s_{kj}} \delta x_j + \frac{(b)_{kj}}{s_{kj}} \delta y_j - \frac{(a)_{ki}}{s_{ki}} \delta x_i - \frac{(b')_{ki}}{s_{ki}} \delta y_i + l_{\beta k}, \quad (4.19)$$

где $l_{\beta k}$ - свободный член, равный

$$l_{\beta k} = (\alpha_{0,AP} - \alpha_{0,AB}) - \beta'_A, \quad (4.20)$$

α_0 - приближенные дирекционные углы направлений;

β'_A - измеренное значение угла.

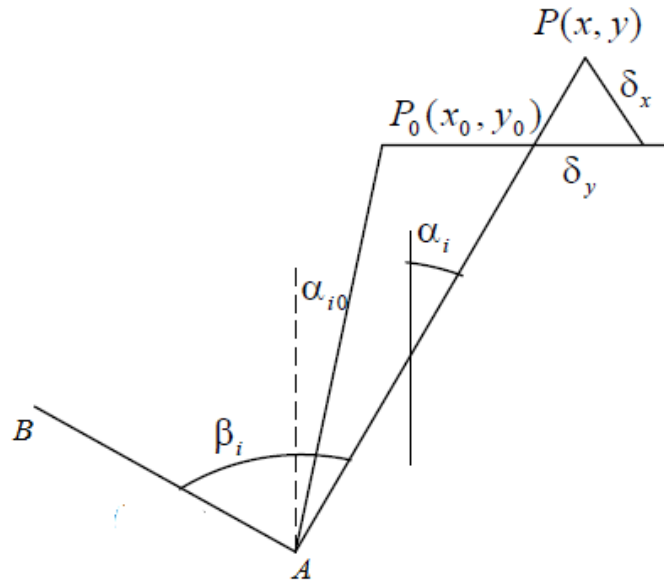


Рис. 14. Схема измерения угла β на пункте А

Величины a и b определяются согласно формулам

$$\left. \begin{aligned} (a) &= -\rho \cdot \sin \alpha, \\ (b) &= \rho \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Уравнение связи для линии s_{AB} (рис. 14) имеет вид

$$s_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2. \quad (4.22)$$

От уравнения (4.22) согласно правилу метода наименьших квадратов переходят к уравнению поправок для длины линии

$$v_{s_{ik}} = -\cos \alpha_{0,ik} \delta x_i - \sin \alpha_{0,ik} \delta y_i + \cos \alpha_{0,ik} \delta x_k + \sin \alpha_{0,ik} \delta y_k + l_{s_{ik}}; \quad (4.23)$$

$$l_{s_{ik}} = \sqrt{(x_{0,k} - x_{0,i})^2 + (y_{0,k} - y_{0,i})^2} - s'_{ik}, \quad (4.24)$$

где s'_{ik} - измеренное значение линии.

4.4. Строгое уравнивание полигонометрического хода коррелятным способом

Матричная форма записи уравнений поправок в коррелятном способе уравнивания имеет следующий вид

$$A_m \cdot V_{n1} + W_{r1} = 0, \quad (4.30)$$

здесь A_m - матрица коэффициентов уравнений поправок;

V_{n1} - вектор поправок размером;

W_{r1} - вектор невязок;

n - число измерений;

k - число определяемых неизвестных;

r - число избыточных измерений, равное количеству условий .

Условие минимума можно представить в виде

$$V_{n1}^T \cdot P_{nn} \cdot V_{n1} = \min . \quad (4.31)$$

Получим систему нормальных уравнений коррелят

$$N_{rr} \cdot K_{r1} + W_{r1} = 0, \quad (4.32)$$

здесь N_{rr} - матрица коэффициентов нормальных уравнений:

$$N_{rr} = A_m \cdot \Pi_{nn} \cdot A_m^T \quad (4.33)$$

Π_{nn} - матрица обратных весов;

K_{r1} - вектор коррелят.

Получим коррелятное уравнение поправок

$$V_{n1} = \Pi_{nn} \cdot A_m^T \cdot K_{r1} . \quad (4.34)$$

Условие дирекционных углов имеет вид

$$[v_\beta] + f_\beta = 0, \quad (4.35)$$

где f_β - угловая невязка хода;

v_β - поправки в измеренные значения углов.

Следующее условие выразится уравнениями координат:

$$\begin{aligned} [v_x] + f_x &= 0; \\ [v_y] + f_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь f_X и f_Y – невязки по приращениям координат, определяемые согласно равенствам

$$\begin{aligned} f_X &= \sum \Delta X_{\text{выч}} - (X_{\text{кон}} - X_{\text{нач}}); \\ f_Y &= \sum \Delta Y_{\text{выч}} - (Y_{\text{кон}} - Y_{\text{нач}}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Поправки в приращения координат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{\Delta X_i} &= \cos \alpha_i \cdot v_{S_i} - \Delta Y \cdot \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}; \\ v_{\Delta Y_i} &= \sin \alpha_i \cdot v_{S_i} + \Delta X \cdot \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Согласно (4.38) получим уравнения координат:

$$\begin{aligned} [\cos \alpha \cdot v_s] - \frac{1}{\rho} \cdot [\Delta Y \cdot v_\alpha] + f_X &= 0; \\ [\sin \alpha \cdot v_s] + \frac{1}{\rho} \cdot [\Delta X \cdot v_\alpha] + f_Y &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Представив равенства (4.39) относительно измеренных углов, получим

$$\begin{aligned} [\cos \alpha \cdot v_s] - \frac{1}{\rho} \cdot [(Y_{n+1} - Y) \cdot v_\beta] + f_X &= 0; \\ [\sin \alpha \cdot v_s] + \frac{1}{\rho} \cdot [(X_{n+1} - X) \cdot v_\beta] + f_Y &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Тогда нормальные уравнения коррелат будут иметь вид:

$$\begin{aligned} [qaa] \cdot k_1 + [qab] \cdot k_2 + [qac] \cdot k_3 + f_\beta &= 0; \\ [qab] \cdot k_1 + [qbb] \cdot k_2 + [qbc] \cdot k_3 + f_X &= 0; \\ [qac] \cdot k_1 + [qbc] \cdot k_2 + [qcc] \cdot k_3 + f_Y &= 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Здесь q соответствует обратному весу измеренных величин

$$q = \frac{1}{p}.$$

Представим нормальные уравнения коррелат в следующем виде

$$\begin{aligned}
& q \cdot (n+1) \cdot k_1 - \frac{q_\beta}{\rho} [(Y_{n+1} - Y)] \cdot k_2 + \frac{q_\beta}{\beta \rho} [(X_{n+1} - X)] \cdot k_3 + f_\beta = 0; \\
& - \frac{q_\beta}{\rho} \cdot [(Y_{n+1} - Y)] \cdot k_1 + \left\{ \frac{q_\beta}{\rho^2} [(Y_{n+1} - Y)^2] + [q_s \cdot \cos^2 \alpha] \right\} \cdot k_2 - \\
& - \left\{ \frac{q_\beta}{\rho^2} \cdot [(Y_{n+1} - Y) \cdot (X_{n+1} - X)] + [q_s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha] \right\} \cdot k_3 + f_x = 0; \\
& \frac{q_\beta}{\rho} \cdot [(X_{n+1} - X)] \cdot k_1 + \left\{ \frac{q_\beta}{\rho^2} [(Y_{n+1} - Y) \cdot (X_{n+1} - X)] + [q_s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha] \right\} \cdot k_2 + \\
& + \left\{ \frac{q_\beta}{\rho^2} \cdot [(X_{n+1} - X)^2] + [q_s \cdot \sin^2 \alpha] \right\} \cdot k_3 + f_y = 0.
\end{aligned}$$

После нахождения корреляты k_1, k_2, k_3 вычисляют поправки в измеренные значения

$$v_{\beta_i} = q_{\beta} \cdot \left\{ k_1 - \frac{1}{\rho} \cdot (Y_{n+1} - Y_i) \cdot k_2 + \frac{1}{\rho} \cdot (X_{n+1} - X_i) \cdot k_3 \right\}; \quad (4.42)$$

$$v_{s_i} = q_{s_i} \cdot \{ \cos \alpha_i \cdot k_2 + \sin \alpha_i \cdot k_3 \}. \quad (4.43)$$

Поправки в дирекционные углы получают согласно поправкам в измеренные углы v_β .

Исправленные значения приращений координат определяются по окончательным значениям длин линий и дирекционным углам сторон хода. Заключительный контроль выполняют по исходным координатам

$$X_{кон} = X_{нач} + \Sigma \Delta X_{ур}; \quad Y_{кон} = Y_{нач} + \Sigma \Delta Y_{ур}. \quad (4.44)$$

4.5. Оценка точности уравненных элементов в коррелятном способе уравнивания

Для оценки точности в коррелятном способе уравнивания составляется функция U по уравненным значениям измеренных величин X_i

$$U = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (4.45)$$

Средняя квадратическая ошибка функции вычисляется согласно формуле

$$m_U = \mu \sqrt{\frac{1}{P_U}}, \quad (4.46)$$

где μ - ошибка единицы веса;

P_U - вес функции уравненных величин.

Ошибка единицы веса при неравноточных измерениях в свою очередь определяется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}, \quad (4.47)$$

а обратный вес функции находится из выражения

$$\frac{1}{P_F} = [qff \cdot r] = [qff] - \frac{[qaf]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} - \dots - \frac{[qgf(r-1)]^2}{[qgg(r-1)]}, \quad (4.48)$$

где a, b, \dots, g - коэффициенты при поправках в условных уравнениях;

f - коэффициенты в оцениваемой функции, приведенной к линейному виду.

В общем случае любую функцию уравненных значений углов и линий полигонометрического хода можно представить в виде

$$U = f_0 + f'_1 v_{\beta_1} + f'_2 v_{\beta_2} + \dots + f'_{n+1} v_{\beta_{n+1}} + f''_1 v_{s_1} + f''_2 v_{s_2} + \dots + f''_n v_{s_n}, \quad (4.49)$$

где f_0 - значение функции, вычисленное по измеренным значениям углов и линий;

f' и f'' - коэффициенты соответственно при угловых и линейных поправках

$$\begin{aligned} U_{si} &= s_{0,i} + v_{si}, \\ U_{\beta i} &= \beta_{0,i} + v_{\beta i}, \\ U_{\alpha i} &= \alpha_{0,i} + [\beta]_1^i, \\ U_{xi} &= x_{0,i+1} + [\cos \alpha \cdot v_s]_1^i - \frac{1}{\rho} [(y_{i+1} - y) v_\beta]_1^i, \\ U_{yi} &= y_{0,i+1} + [\sin \alpha \cdot v_s]_1^i + \frac{1}{\rho} [(x_{i+1} - x) v_\beta]_1^i \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $s_0, \beta_0, \alpha_0, x_0, y_0$ - значения функций, полученные по измеренным значениям углов и линий.

Для полигонометрического хода ошибка единицы веса μ будет иметь вид

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2]}{r}}. \quad (4.51)$$

Обратный вес будет определяться выражением

$$\frac{1}{P_F} = [qff \cdot r] = [qff] - \frac{[qaf]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} - \dots - \frac{[qgf \cdot 2]^2}{[qgg \cdot 2]}. \quad (4.52)$$

Вычисление обратного веса функции можно выполнять совместно с решением нормальных уравнений коррелат способом последовательного исключения неизвестных в дополнительных столбцах.

4.6. Применение двухгруппового способа при уравнивании полигонометрического хода

При уравнивании полигонометрического хода можно воспользоваться двухгрупповым способом, который является разновидностью коррелятного способа. Через точку с координатами x_0 и y_0 проведем новую систему координат, оси которой смещены существующей и ей параллельны. Координаты x_0 и y_0 вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x}{n+1}; \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} y}{n+1}. \quad (4.53)$$

Точка, имеющая координаты x_0 и y_0 , является центром тяжести полигонометрического хода (рис. 15). Координаты любого i -го пункта полигонометрического хода относительно центра тяжести имеют новые координаты ξ_i , η_i , получившие название центральных. Между центральными координатами и координатами x и y , основной системы имеется следующая функциональная зависимость

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_0; \\ \eta_i &= y_i - y_0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Поскольку оси систем параллельны друг относительно друга, следовательно, имеем

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - x_i) &= (\xi_{n+1} - \xi_i), \\ (y_{n+1} - y_i) &= (\eta_{n+1} - \eta_i). \end{aligned} \quad (4.55)$$

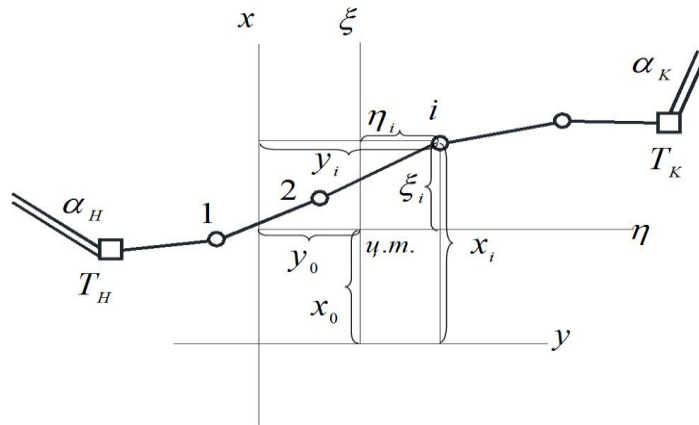


Рис. 15. Связь центральных координат с координатами x и y

Система условных уравнений выразится следующими равенствами:

$$\begin{aligned} a_1 v_{\beta_1} + a_2 v_{\beta_2} + \dots + a_{n+1} v_{\beta_{n+1}} + f_{\beta} &= 0; \\ [\cos \alpha v_s] - \frac{1}{\rho} [(\eta_{n+1} - \eta) v_{\beta}] + f'_x &= 0; \\ [\sin \alpha v_s] + \frac{1}{\rho} [(\xi_{n+1} - \xi) v_{\beta}] + f'_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Условные уравнения (4.56) разделим на две группы: в первую отнесем угловое условное уравнение, а во вторую – условные уравнения поправок абсцисс и ординат. Решив уравнение первой группы, определяем первичные поправки v'_{β} в измеренные углы.

Условному уравнению соответствует нормальное уравнение коррелат вида

$$[qaa]k_1 + f_{\beta} = 0. \quad (4.57)$$

Или с учетом значений коэффициентов

$$q_{\beta}(n+1) \cdot k_1 + f_{\beta} = 0, \quad (4.58)$$

откуда

$$k_1 = -\frac{f_{\beta}}{(n+1)q_{\beta}}. \quad (4.59)$$

Уравнение поправок согласно (4.57) имеет вид:

$$v'_{\beta_i} = q_{\beta} a_i k_1. \quad (4.60)$$

С учетом равенств (4.58) и (4.59) получим значение первичной поправки

$$v'_\beta = -\frac{f_\beta}{n+1}. \quad (4.61)$$

Решая совместно уравнения (4.56), со свободными членами, исправленными первичными поправками v'_β . Следовательно,

$$\sum v'_\beta + \sum v''_\beta + f_\beta = 0, \quad (4.62)$$

но согласно формуле (4.61)

$$\sum v'_\beta = -f_\beta, \quad (4.63)$$

тогда уравнение (4.62) будет иметь вид

$$\sum v''_\beta = 0. \quad (4.64)$$

Подставим значение v'_β , найденное согласно формуле (4.61), в уравнения поправок абсцисс и ординат (4.56)

$$\begin{aligned} [\cos \alpha v_s] - \frac{1}{\rho} [(\eta_{n+1} - \eta)(v'_\beta + v''_\beta)] + f'_x &= 0; \\ [\sin \alpha v_s] + \frac{1}{\rho} [(\xi_{n+1} - \xi)(v'_\beta + v''_\beta)] + f'_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Представим уравнения (4.65) в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\cos \alpha v_s] - \frac{\eta_{n+1}}{\rho} [v'_\beta] + [\eta] \frac{v'_\beta}{\rho} - \frac{\eta_{n+1}}{\rho} [v''_\beta] + \frac{1}{\rho} [\eta v''_\beta] + f'_x &= 0; \\ [\sin \alpha v_s] + \frac{\xi_{n+1}}{\rho} [v'_\beta] - [\xi] \frac{v'_\beta}{\rho} + \frac{\xi_{n+1}}{\rho} [v''_\beta] - \frac{1}{\rho} [\xi v''_\beta] + f'_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

С учетом (4.62) и (4.63) уравнения (4.66) будут иметь вид

$$\begin{aligned} [\cos \alpha v_s] + \frac{1}{\rho} [\eta v''_\beta] + f'_x + \frac{f_\beta}{\rho} \eta_{n+1} &= 0; \\ [\sin \alpha v_s] - \frac{1}{\rho} [\xi v''_\beta] + f'_y - \frac{f_\beta}{\rho} \xi_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

В равенствах (4.67)

$$\begin{aligned} f'_x + \frac{f_\beta}{\rho} \eta_{n+1} &= f_x; \\ f'_y - \frac{f_\beta}{\rho} \xi_{n+1} &= f_y. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Следовательно, условные уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} [\cos \alpha v_s] + \frac{1}{\rho} [\eta v_\beta''] + f_x &= 0; \\ [\sin \alpha v_s] - \frac{1}{\rho} [\xi v_\beta''] + f_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Систему, состоящую из преобразованных уравнений (4.63) и (4.68), решим под условием

$$[p_\beta v_\beta'^2] + [p_s v_s^2] = \min.$$

Составим систему нормальных уравнений коррелат:

$$\begin{aligned} q_\beta (n+1)k_1 &= 0; \\ \left\{ \frac{q_\beta}{\rho^2} [\eta^2] + [q_s \cos^2 \alpha] \right\} k_2 + \left\{ -\frac{q_\beta}{\rho^2} [\xi \eta] + [q_s \cos \alpha \sin \alpha] \right\} k_3 + f_x &= 0; \\ \left\{ -\frac{q_\beta}{\rho^2} [\xi \eta] + [q_s \cos \alpha \sin \alpha] \right\} k_2 + \left\{ \frac{q_\beta}{\rho^2} [\xi^2] + [q_s \sin^2 \alpha] \right\} k_3 + f_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Значение $k_1 = 0$ при решении первого уравнения системы (4.70). Совместное решение второго и третьего уравнений позволяет определить значения k_2 и k_3 . Обозначим коэффициенты преобразованных уравнений буквами A , B и C :

$$\begin{aligned} [qbb] &= \frac{q_\beta}{\rho^2} [\eta^2] + [q_s \cos^2 \alpha] = A; \\ [qbc] &= -\frac{q_\beta}{\rho^2} [\xi \eta] + [q_s \cos \alpha \sin \alpha] = B; \\ [qcc] &= \frac{q_\beta}{\rho^2} [\xi^2] + [q_s \sin^2 \alpha] = C. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Следовательно, система преобразованных нормальных уравнений коррелат примет вид

$$\begin{aligned} Ak_2 + Bk_3 + f_x &= 0; \\ Bk_2 + Ck_3 + f_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Из решения уравнений системы (4.72) получим значения второго и третьего неизвестных k_2 и k_3

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{N}(Bf_y - Cf_x); \\ k_3 &= \frac{1}{N}(Bf_x - Af_y), \end{aligned} \quad (4.73)$$

где $N = AC - B_2$.

По найденным значениям неизвестных k_2 и k_3 вычислим вторичные поправки в углы v''_{β} и поправки в линии v_s

$$\begin{aligned} v''_{\beta_i} &= \frac{q\beta}{\rho}(\eta_i k_2 - \xi_i k_3); \\ v_{s_i} &= q_{s_i}(\cos \alpha_i k_2 - \sin \alpha_i k_3). \end{aligned} \quad (4.74)$$

С помощью вторичных поправок v''_{β} определяют поправки в дирекционные углы получим по формуле

$$v_{\alpha_i} = \sum_1^i v''_{\beta}. \quad (4.75)$$

Окончательные значения определяемых величин вычисляют путем введения поправок v''_{β} , v_a и v_s в соответствующие значения. Уравненные значения позволяют вычислить уравненные значения приращений координат, с помощью которых получим уравненные координаты.

Оценку точности в двухгрупповом способе уравнивания производят с помощью ошибки единицы веса μ

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_{\beta} v'_{\beta} v'_{\beta}] + [p_{\beta} v''_{\beta} v''_{\beta}] + [p_s v_s v_s]}{3}}. \quad (4.76)$$

Оценка точности уравненных значений в полигонометрическом ходе производится при помощи функции вида (4.51).

Обратный вес функции находится по формуле (4.52). Для двухгруппового способа уравнивания согласно схеме решения Гаусса

$$\frac{1}{P_F} = [qff] - \frac{[qaf]^2}{[qaa]} - \frac{[qbf]^2}{[qbb]} - \frac{\left([qcf] - \frac{[qbc][qbf]}{[qbb]} \right)^2}{[qcc] - \frac{[qbc]^2}{[qbb]}}. \quad (4.77)$$

Средняя квадратическая ошибка уравненных величин в полигонометрическом ходе вычисляют согласно формуле (4.47).

4.7. Уравнивание полигонометрического хода любой формы

В том случае, если в полигонометрическом ходе измеряются дирекционные углы линий, то условные уравнения поправок будут представлены в виде

$$\begin{aligned} [\cos \alpha v_s] - \frac{1}{\rho} [\Delta y v_\alpha] + f_x &= 0; \\ [\sin \alpha v_s] + \frac{1}{\rho} [\Delta x v_\alpha] + f_y &= 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

где v_α - поправка в измеренный дирекционный угол.

Решение уравнений (4.78) под условием

$$[p_\alpha v_\alpha v_\alpha] + [p_s v_s v_s] = \min$$

приводит к нормальным уравнениям коррелат

$$\begin{aligned} \left\{ [q_s \cos^2 \alpha] + \frac{1}{\rho^2} [q_\alpha \Delta y^2] \right\} k_1 + \left\{ [q_s \sin \alpha \cos \alpha] - \frac{1}{\rho^2} [q_\alpha \Delta x \Delta y] \right\} k_2 + f_x &= 0; \\ \left\{ [q_s \sin \alpha \cos \alpha] - \frac{1}{\rho^2} [q_\alpha \Delta x \Delta y] \right\} k_1 + \left\{ [q_s \sin^2 \alpha] + \frac{1}{\rho^2} [q_\alpha \Delta x^2] \right\} k_2 + f_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Установим веса измеренных величин

$$p_\alpha = \frac{\mu^2}{m_\alpha^2}; \quad p_{s_i} = \frac{\mu^2}{m_{s_i}^2}. \quad (4.80)$$

Поскольку угловые измерения в полигонометрическом ходе равноточны между собой, то и дирекционные углы определяются с одинаковой точностью, т.е. с одной и той же средней квадратической ошибкой m_α . Таким образом, определяя в формулах (4.79) значение ошибки единицы веса μ , можно вычислить значения весов для различных видов полигонометрии.

Поправки в измеренные дирекционные углы и линии определяются согласно формулам

$$v_{\alpha_i} = -\frac{q_{\alpha}}{\rho}(\Delta y_i k_1 - \Delta x_i k_2);$$

$$v_{s_i} = q_{s_i}(\cos \alpha_i k_1 + \sin \alpha_i k_2).$$
(4.81)

4.8. Уравнивание полигонометрических ходов раздельным способом

Раздельное уравнивание предполагает последовательное решение условных уравнений поправок вида

$$[v_{\beta}] + f_{\beta} = 0;$$
(4.82)

$$[v_{\Delta x}] + f_x = 0;$$

$$[v_{\Delta y}] + f_y = 0.$$
(4.83)

Решая условное уравнение поправок (4.81) согласно принципу наименьших квадратов, приходим к нормальному уравнению коррелат

$$(n + 1) \cdot k_1 + f_{\beta} = 0,$$

откуда определим коррелату k_1

$$k_1 = -\frac{f_{\beta}}{n + 1}.$$

Поправки v_{β} будут равными для всех углов:

$$v_1 = -\frac{f_{\beta}}{n + 1}.$$
(4.84)

Из решения условных уравнений поправок координат (4.83), принимая вес поправок приращений координат

$$p_i = \frac{1}{s_i},$$

получим нормальные уравнения коррелат

$$[s]k_2 + f_x = 0;$$

$$[s]k_3 + f_y = 0,$$
(4.85)

решение которых определяет коррелаты

$$k_2 = -\frac{f_x}{[s]}; \quad k_3 = -\frac{f_y}{[s]}.$$

По вычисленным коррелатам k_2 и k_3 находим поправки v_x и v_y :

$$v_{x_i} = -\frac{f_x}{[S]} s_i; \quad v_{y_i} = -\frac{f_y}{[S]} s_i. \quad (4.86)$$

Раздельном уравнивании полигонометрического хода допускается нарушение строгого уравнивания:

- произвольное установление весов в приращениях координат;
- определяются поправки не в измеренные величины, а в функции от них.

Рассмотрим влияние раздельного уравнивания полигонометрических ходов любой формы на измеренные величины.

Определим координаты точек полигонометрического хода (рис. 16), если известно исходное положение пункта T_A и исходного дирекционного направления α_A . Предположим, что положение точек, соответствующих вычисленным координатам, окажется в точках $1', 2', T_{B'}$. Таким образом конечный пункт $T_{B'}$ не совпадает с конечным пунктом T_B .

Величина линейной невязки хода f_s получается согласно формуле

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

а дирекционный угол смещения пункта T_B определяется по формуле

$$\operatorname{tg} A_s = \frac{f_y}{f_x}. \quad (4.87)$$

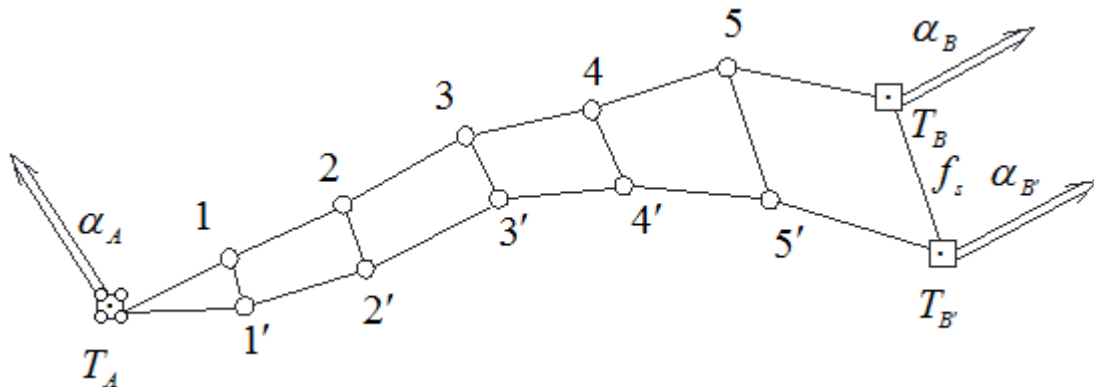


Рис. 16. Схема к определению координат конечной точки хода

Координаты точек полигонометрического хода вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}x_k &= x_H + \sum_1^k \Delta x_i; \\y_k &= y_H + \sum_1^k \Delta y_i.\end{aligned}\tag{4.88}$$

Отклонения координат точек хода по координатам составят:

$$\begin{aligned}v_{x_k} &= \sum_1^k v_{\Delta x_i} = -\frac{f_x}{\sum_1^n s_i} \sum_1^k s_i; \\v_{y_k} &= \sum_1^k v_{\Delta y_i} = -\frac{f_y}{\sum_1^n s_i} \sum_1^k s_i.\end{aligned}\tag{4.89}$$

Абсолютное отклонение пункта согласно (4.89) вычислится

$$v_k = \sqrt{v_{x_k}^2 + v_{y_k}^2} = \frac{f_s}{\sum_1^n s_i} \sum_1^k s_i.\tag{4.90}$$

Определение дирекционный угол направления отклонения точки

$$\operatorname{tg} A_k = \frac{v_{y_k}}{v_{x_k}} = \frac{f_y}{f_x} = \operatorname{tg} A_s.\tag{4.91}$$

Раздельное уравнивание позволяет точкам полигонометрического хода смещаться параллельно направлению линейной невязки, на величину, пропорциональную удалению данной точки от начального пункта T_A .

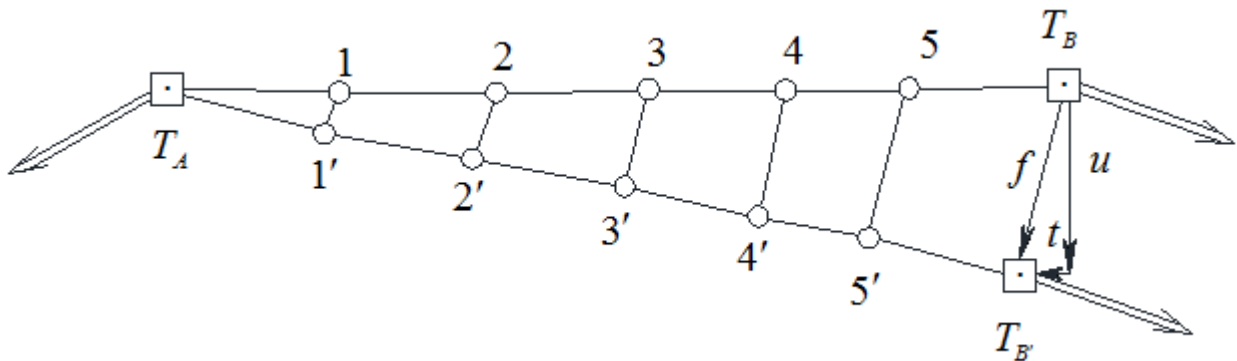


Рис. 17. Схема к распределению поправок в приращениях координат

При раздельном уравнивании вытянутого полигонометрического хода (рис. 17) поправки вводят в примычные углы. Дирекционные углы хода исправляются согласно

$$v_{\alpha} = -\frac{u}{[s]}\rho, \quad (4.92)$$

где u - поперечная невязка хода;

$[s]$ - длина хода.

Поправки в длины линий хода вычисляются согласно

$$v_s = -\frac{t}{[s]}s_i, \quad (4.93)$$

4.9. Коррелятный способ уравнивания полигонометрической сети

Для начала определяют число условий, возникающих в сети.

$$r = (N + T - 1) \cdot 3 + Q. \quad (4.94)$$

где N - число замкнутых полигонов;

T - число твердых исходных пунктов;

Q - число твердых дирекционных углов на узловых точках.

Для сети (рис. 18) число независимых полигонов - 2, общее число условий - 7, число дирекционных углов - 3 и координат - 4. Следовательно, количество условных уравнений будет:

$$\begin{aligned} [v_{\beta}]_1 + f_{\beta_1} &= 0; \\ [v_{\beta}]_2 + f_{\beta_2} &= 0; \\ [v_{\beta}]_3 + f_{\beta_3} &= 0; \\ [\cos \alpha v_s]_1 + [\cos \alpha v_s]_2 - \frac{1}{\rho}[(y_B - y)v_{\beta}]_1 - \frac{1}{\rho}[(y_B - y)v_{\beta}]_2 + f'_{x_I} &= 0; \\ [\sin \alpha v_s]_1 + [\sin \alpha v_s]_2 + \frac{1}{\rho}[(x_B - x)v_{\beta}]_1 + \frac{1}{\rho}[(x_B - x)v_{\beta}]_2 + f'_{y_I} &= 0; \\ [\cos \alpha v_s]_3 + [\cos \alpha v_s]_2 - \frac{1}{\rho}[(y_B - y)v_{\beta}]_3 - \frac{1}{\rho}[(y_B - y)v_{\beta}]_2 + f'_{x_{II}} &= 0; \\ [\sin \alpha v_s]_3 + [\sin \alpha v_s]_2 + \frac{1}{\rho}[(x_B - x)v_{\beta}]_3 + \frac{1}{\rho}[(x_B - x)v_{\beta}]_2 + f'_{y_{II}} &= 0. \end{aligned}$$

Как в любой плановой сети, кроме указанных условий, могут возникать и дополнительные условия - горизонта и угла. На пункте составляется условное уравнение горизонта вида

$$\sum_1^k \nu_{\beta} + w_r = 0, \quad (4.95)$$

где k - число измеренных на пункте углов.

w_r - угловая невязка по формуле

$$w_r = \sum \nu_{\beta} - 360^{\circ}. \quad (4.96)$$

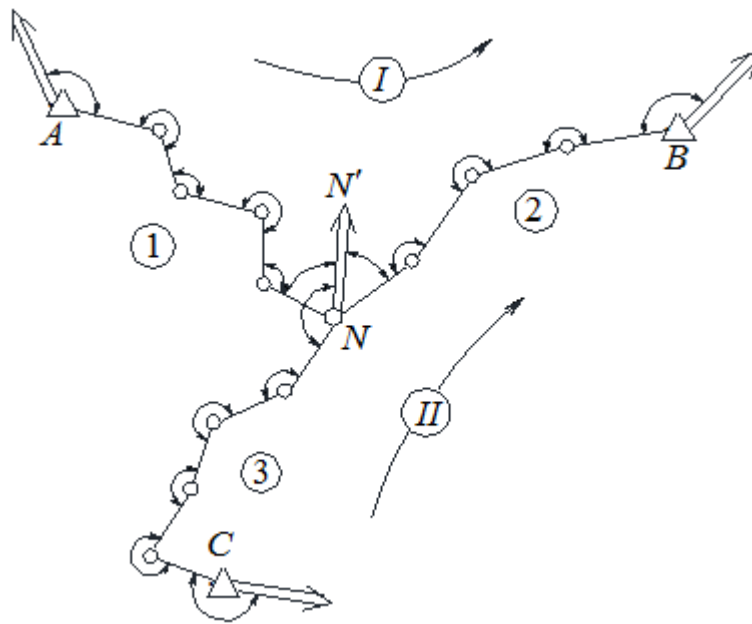


Рис. 18. Сеть полигонометрии

В случае привязки полигонометрического хода к двум исходным пунктам (рис. 19), составляют условные уравнения поправок угла вида

$$\nu_{\beta_{\text{прим}}} - \nu'_{\beta_{\text{прим}}} + w_y = 0, \quad (4.97)$$

здесь

$$w_y = \beta_{\text{прим}} - \beta'_{\text{прим}} - (\alpha_T - \alpha_{T'}), \quad (4.98)$$

где $\beta_{\text{прим}}$ и $\beta'_{\text{прим}}$ - примычные углы на исходных пунктах T и T' ;

$\alpha_T, \alpha'_{T'}$ - дирекционные углы.

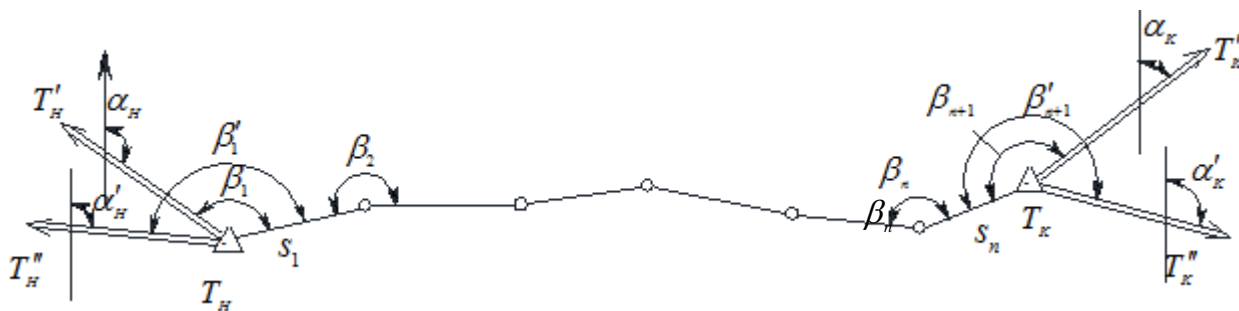


Рис. 19. Сеть полигонометрии с двумя исходными пунктами

От условных уравнений поправок переходят к нормальным уравнениям коррелят, предварительно установив веса в соответствии с формулами для весов.

Из решения нормальных уравнений вычисляют поправки по формулам

$$\begin{aligned} v_{\beta_i} &= q_{\beta} (a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + t_i k_r), \\ v_{s_i} &= q_s (a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + t_i k_r). \end{aligned} \quad (4.99)$$

В дальнейшем уравнивания сети выполняется в соответствии с уравниванием полигонометрического хода. Аналогичным образом выполняется и оценка точности.

4.10. Уравнивание полигонометрической сети двухгрупповым способом

Первую группу составит система из трех условных уравнения поправок дирекционных углов. Вторую – четыре условных уравнения поправок координат.

Первичные поправки в углы распределяются согласно вычисленным невязкам поровну на все углы ходов.

Для каждого хода определяется центр тяжести и вычисляются центральные координаты. Составляют условные уравнения поправок:

$$\begin{aligned} [v_{\beta}'']_1 &= 0; \\ [v_{\beta}'']_2 &= 0; \\ [v_{\beta}'']_3 &= 0; \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned}
[\cos \alpha v_s]_1 + [\cos \alpha v_s]_2 + \frac{1}{\rho} [\eta v''_\beta]_1 + \frac{1}{\rho} [\eta v''_\beta]_2 + f_{x_I} &= 0; \\
[\sin \alpha v_s]_1 + [\sin \alpha v_s]_2 - \frac{1}{\rho} [\xi v''_\beta]_1 - \frac{1}{\rho} [\xi v''_\beta]_2 + f_{y_I} &= 0; \\
[\cos \alpha v_s]_3 + [\cos \alpha v_s]_2 + \frac{1}{\rho} [\eta v''_\beta]_3 + \frac{1}{\rho} [\eta v''_\beta]_2 + f_{x_{II}} &= 0; \\
[\sin \alpha v_s]_3 + [\sin \alpha v_s]_2 - \frac{1}{\rho} [\xi v''_\beta]_3 - \frac{1}{\rho} [\xi v''_\beta]_2 + f_{y_{II}} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.101}$$

где f_x и f_y - невязки в приращения координат.

Из решение уравнений первой группы вычисляются коррелаты $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ и $k_3 = 0$. В дальнейшем для условных уравнений поправок координат составляют нормальные уравнения, решение которых позволяет вычислить вторичные поправки. Уравнивания и оценку точности производят так же, как для одиночного хода.

4.11. Раздельное уравнивание полигонометрической сети

Раздельное уравнивание сети предполагает сначала углы, а затем согласно уравненным углам и измеренным длинам линий находят приращения координат.

Уравнивание углов начинают с узлового направление. Для сети (рис. 20, а) за узловое направление можно принять линию, выходящую из точки N : NK , NO или NM .

Дирекционный угол $\alpha_{NN'}$ вычисляется от каждого исходного дирекционного угла.

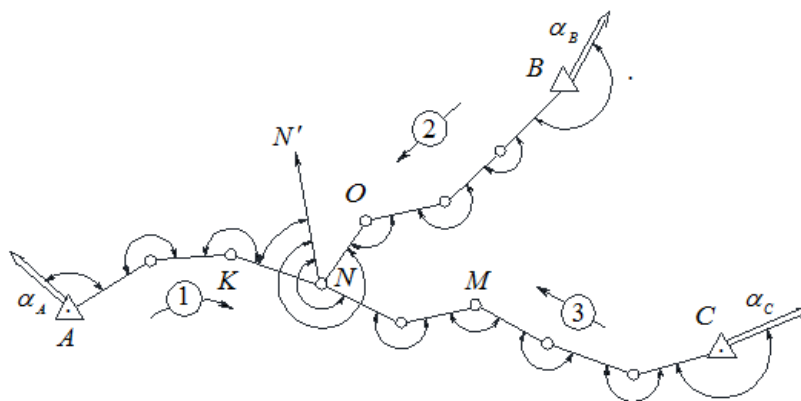
Поскольку число измеренных углов n' может быть различным необходимо установить веса

$$p = \frac{C}{n'_i}. \tag{4.102}$$

Окончательное значение дирекционного угла, полученное по трем ходам, находят по формуле

$$\alpha_N = \frac{\alpha_{N_1} p_{\alpha_1} + \alpha_{N_2} p_{\alpha_2} + \alpha_{N_3} p_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3}}. \quad (4.103)$$

a)



б)

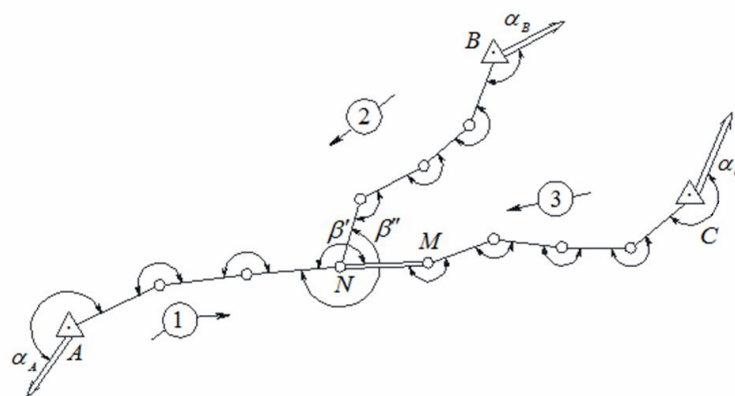


Рис. 20. Сеть полигонометрии с одним узловым пунктом

Если за узловое направление принять линию NM , то на пункте N должны быть измерены примычные углы согласно рис. 20, б.

После выполнения уравнительных вычислений по углам в ходах определяют дирекционные углы, а затем, вычислив приращения координат по каждому ходу, уравнивают отдельно абсциссы и ординаты.

Координаты узлового пункта получаются по каждому из ходов согласно формула м

$$\begin{aligned} x_{N_i} &= x_{ucx} + \sum \Delta x_i; \\ y_{N_i} &= y_{ucx} + \sum \Delta y_i. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Учитывая разную длину хода и число его сторон, следует ввести веса координат.

$$p_{x_i} = p_{y_i} = \frac{C}{\sum s_i} \quad (4.105)$$

где $\sum s_i$ - длина i -го хода.

Определение весов координат выполняется по средним квадратическим ошибкам согласно формулам

$$p_{x_i} = \frac{C}{m_{x_i}^2}; \quad p_{y_i} = \frac{C}{m_{y_i}^2} \quad (4.106)$$

Уравненные координаты определяют по формуле общей арифметической середины:

$$x_N = \frac{x_{N_1} p_{x_1} + x_{N_2} p_{x_2} + x_{N_3} p_{x_3}}{p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3}};$$

$$y_N = \frac{y_{N_1} p_{y_1} + y_{N_2} p_{y_2} + y_{N_3} p_{y_3}}{p_{y_1} + p_{y_2} + p_{y_3}}. \quad (4.107)$$

Оценка точности уравненных значений положения узловой точки производится через ошибку единицы по формулам

$$M_\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{P_\alpha}}; \quad M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}}; \quad M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}}, \quad (4.108)$$

где P - вес уравненного элемента, соответственно равный

$$P_\alpha = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3};$$

$$P_x = p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3};$$

$$P_y = p_{y_1} + p_{y_2} + p_{y_3}. \quad (4.109)$$

Ошибка единицы веса вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \quad (4.110)$$

где p - веса дирекционных направлений или координат;

v - отклонения вычисленных направлений или координат от общей арифметической середины;

n - число ходов.

О г л а в л е н и е

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ И МЕРЫ ТОЧНОСТИ	4
1.1. Общие сведения об измерениях	4
1.2. Виды ошибок измерений	5
1.3. Свойства случайных ошибок	6
1.4. Критерии точности результатов измерений	8
1.5. Оценка точности функций измеренных величин	10
1.6. Неравноточные измерения и их веса	12
1.7. Вес функции независимых величин	13
2. СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	13
2.1. Сущность принципа наименьших квадратов	13
2.2. Параметрический способ уравнивания	16
2.2.1. Теория параметрического способа уравнивания	16
2.2.2. Матричный вид параметрического уравнивания	20
2.2.3 Составление нормальных уравнений	22
2.2.4. Решение нормальных уравнений	24
2.2.5. Контроли решения нормальных уравнений	29
2.2.6. Весовые коэффициенты и оценка точности определяемых величин. . .	31
2.2.7. Оценка точности функций уравненных величин	38
2.3. Коррелятный способ уравнивания	40
2.3.1. Сущность коррелятного способа уравнивания	40
2.3.2. Теория коррелятного уравнивания	42
2.3.3. Составление и решение нормальных уравнений коррелат	45
2.3.4. Оценка точности по материалам коррелятного уравнивания	49
3. ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫЕ ПОСТРОЕНИЯ	51
3.1. Способ прямой угловой засечки	51
3.2. Способ линейной засечки	53

3.3. Способ обратной угловой засечки	55
3.4. Задача Ганзена	58
3.5. Линейно-угловой ход	59
3.5.1. Вычисление координат пунктов линейно-углового хода	59
3.5.2. Привязка линейно-угловых ходов	62
4. УРАВНИВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ХОДОВ И СЕТЕЙ	63
4.1. Постановка задачи уравнивания	63
4.2. Предварительный анализ результатов полевых измерений	64
4.3. Строгое уравнивание полигонометрического хода параметрическим способом.	67
4.4. Строгое уравнивание полигонометрического хода коррелятным способом	70
4.5. Оценка точности уравненных элементов в коррелятном способе уравнивания	72
4.6. Применение двухгруппового способа при уравнивании полигонометрического хода	74
4.7. Уравнивание полигонометрического хода любой формы	79
4.8. Уравнивание полигонометрических ходов отдельным способом	80
4.9. Коррелятный способ уравнивание полигонометрической сети	83
4.10. Уравнивание полигонометрической сети двухгрупповым способом . . .	85
4.11. Раздельное уравнивание полигонометрической сети	86
Библиографический список	91

Библиографический список

1. Беляев Б.И. Практикум по математической обработке маркшейдерско-геодезических измерений: Учебное пособие для вузов.- М.: Недра, 1989.- 316 с.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Городская полигонометрия (уравнивание и основы проектирования). – М.: Недра, 1979. – 303 с.
3. Бурмистров Г.А. Основы способа наименьших квадратов. – М.: Гос геолтехиздат, 1963. – 392 с.
4. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
5. Губеладзе А.Р. Основы теории ошибок измерений: Учебное пособие.- Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 1998.- 106 с.
6. Инженерная геодезия. Учеб. для вузов / Е.Б. Ключин, М.И. Киселев, Д.Ш. Михелев, В.Д. Фельдман; Под ред. Д.Ш. Михелева. - М.: Изд. центр "Академия", 2004. - 480 с.
7. Губеладзе А.Р., Яговкина Е.Н. Статистическая обработка результатов измерений: Учебное пособие.- Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 1999.- 130 с.
8. Гудков В.М., Хлебников А.В. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений: Учебник для вузов.- М.: Недра, 1990.- 335 с.
9. Дьяков Б.Н. Геодезия. Общий курс: Учеб. пособие для вузов. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1993.- 171 с
10. Лесных Н.Б. Метод наименьших квадратов на примерах уравнивания полигонометрических сетей [Текст]: монография / Н.Б. Лесных. – Новосибирск: СГГА, 2007. – 160 с.
11. Лесных Н.Б. Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов: Учеб. пособие. – Новосибирск: СГГА, 2003. – 60 с.

12. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: Справочное пособие.- М.: Картогеоцентр-Геодезиздат, 1994.- 431 с.

13. Поклад Г.Г. Геодезия: Учеб. для вузов. - М.: Недра, 1988. - 304 с.: ил.

14. Селиханович В.Г. Геодезия: Учебник для вузов, Ч.II. - М.: Недра, 1981. - 544 с.

15. Федотов Г.А. Инженерная геодезия. Учебник. - М.: Высш. шк., 2007.- 463 с.: ил.

16. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Учебное издание

Автандил Рубенович Губеладзе

ТМОГИ

Обработка результатов измерений и
уравнивание полигонометрических ходов

Учебное пособие

Редактор *Н.Е. Гладких*

Компьютерная верстка и макет *А.Р. Губеладзе*

Темплан 2013 г., поз.

Подписано в печать

Уч.-изд. л. Усл.-печ. л.

Формат 60х84/16. Бумага писчая. Ризограф.

Тира 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский центр

Ростовского государственного строительного университета

344022. Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162