

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ростовский государственный строительный университет»**

**Теория математической обработки геодезических измерений
Обработка результатов эксперимента**

**Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы
для обучающихся по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия»
и направлению подготовки
21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»**

**Ростов-на-Дону
2019**

УДК 528.1

Теория математической обработки геодезических измерений. Обработка результатов эксперимента: методические указания по выполнению курсовой работы для обучающихся по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия» и направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование». – Ростов-н/Д: ДГТУ, 2019. – 32 с.

В методических указаниях приведены основные расчетные формулы. Дана методика расчета оптимальных параметров сооружения. Рассмотрены вопросы, связанные со статистической обработкой результатов эксперимента, оценкой точности параметров распределения, а также с проверкой различных гипотез как о параметрах, так и о самих распределениях полученных в процессе эксперимента значений. Даны элементы корреляции и регрессионного анализа. Составлены программы для обработки результатов эксперимента на ПЭВМ.

Электронная версия методических указаний находится в ЭБС РГСУ (lib.rgsu.ru)

УДК 528.1

Составители: к.т.н., доцент Губеладзе А.Р.,
ассистент Яговкина Е.Н.

© Донской государственный
технический университет, 2019

1. Основные положения по анализу точности геодезического контроля технического состояния сооружения

В предлагаемой студентам курсовой работе на конкретном производственном примере необходимо установить оптимальные параметры оси пути радиального мостового крана (рис. 1), оценить точность геодезических измерений, а также вычисленного вероятнейшего значения радиуса, установить допуск на выполнение геодезических работ.

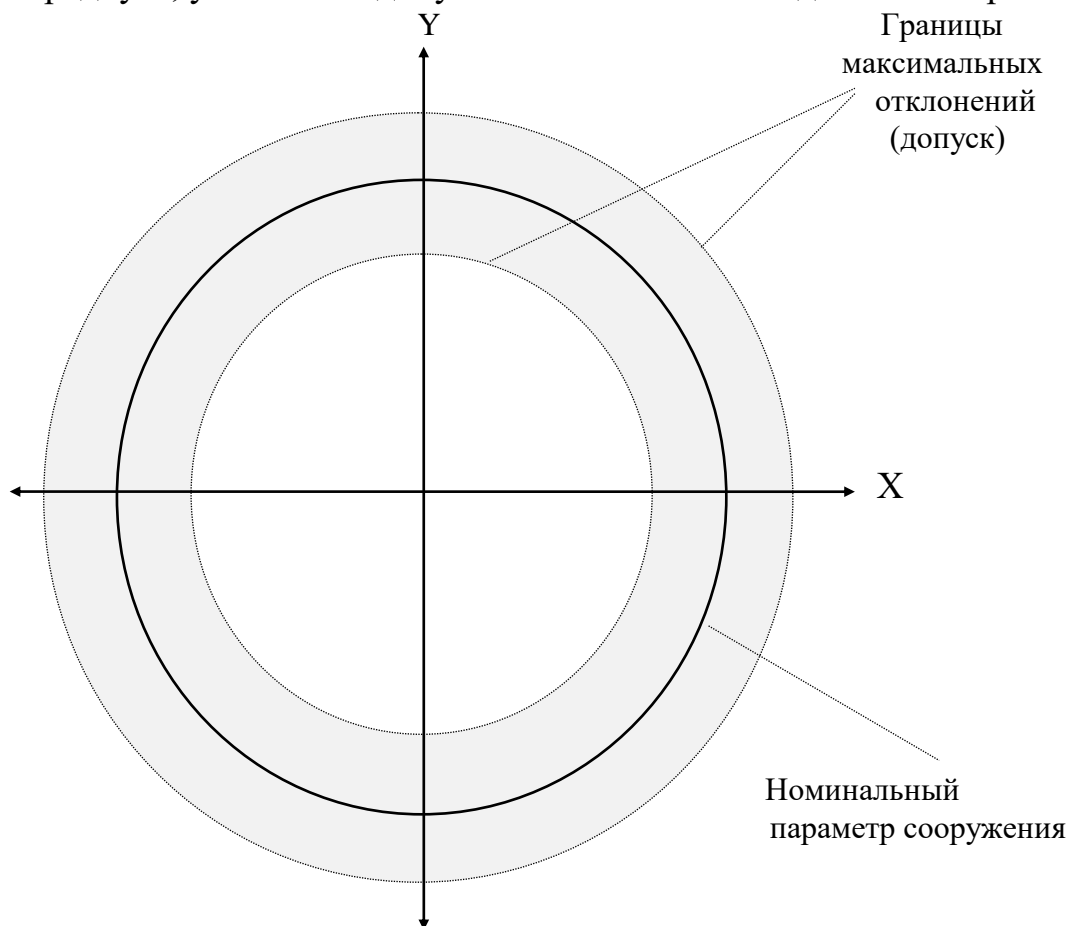


Рис. 1. Схема оси радиального мостового крана

Немаловажную роль играет соблюдение проектных размеров как всего сооружения в целом, так и отдельных его элементов. Действительные размеры конструкций и сооружения после их изготовления и монтажа могут в значительной степени отличаться от проектных. Отклонение действительных параметров от проектных может осуществляться в ту или иную сторону, т.е. может быть как положительным (в сторону увеличения), так и отрицательным (в сторону уменьшения). Следовательно, каждый размер имеет свои предельные значения: наибольший x_{max} и наименьший x_{min} . Разность между экстремальными значениями составляет допустимую величину положения объекта δ , т.е.

$$\delta = x_{max} - x_{min} . \quad (1)$$

Следует подразделить все размеры и допуски на конструкционные и производственные. К первым относятся такие, которые удовлетворяют оптимальным эксплуатационным требованиям, предъявляемым к сооружениям. К производственным допускам относятся такие, которые необходимо соблюдать в процессе изготовления конструкций, при выполнении строительно-монтажных работ. Эти допуски должны соответствовать всем требованиям, предъявляемым проектом к качеству сооружения. Все допуски необходимо устанавливать, исходя из расчета точности конструкций. Установленная проектом точность определяется допуском, а фактическая точность оценивается ошибками, возникшими как при производстве строительно-монтажных работ, так и процессе геодезических измерений.

Применение как при строительно-монтажных работах, так и при обследовании зданий и сооружений геодезических методов ставит ряд задач, которые необходимо решать на различных этапах. На первоначальном этапе, включающем в себя предварительную оценку состояния объекта, и последующих, заключающихся в проведении работ по определению полной геометрии сооружения с учетом его напряженно-деформационных нагрузок, необходимо установить достаточную точность геодезических измерений. В дальнейшем возникают вопросы, связанные с устранением отклонений параметров объекта от номинальных. Во всех этих случаях требуется особый подход к оценке как самого состояния сооружения, так и точности геодезических работ, причем их можно увязать друг с другом, т.е. техническое состояние влияет на производство геодезических работ и точность геодезических измерений позволяет оценить состояние объекта.

Точность и допуски необходимо рассматривать как качественную оценку, характеризующую конструкции, сооружение, подготовительные работы, строительство, монтаж. При этом система допусков представляет собой стандартизацию точности технологических процессов при возведении сооружения, опирающуюся на предельные ошибки исходя из вероятностного подхода к теории ошибок измерений, откуда установлено, что случайные ошибки результатов измерений подчиняются нормальному закону распределения. Знание функции плотности распределения таких ошибок дает возможность для решения целого ряда задач, возникающих при геодезических работах:

- 1) определение наиболее вероятного значения измеряемой величины;
- 2) установление предельных значений (допусков) для конкретного вида работ; вычисление вероятности появления случайной ошибки в определенном интервале;

3) выявление предельных значений, за которыми ошибки можно квалифицировать как грубые.

Для этого воспользуемся функцией Лапласа, имеющей следующий вид

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2)$$

где t - нормированный параметр функции Лапласа.

Вероятность того, что случайная величина x примет значения, принадлежащие интервалу (α, β) , можно выразить через функцию распределения

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (3)$$

Переходя к нормированной случайной величине t , имеем

$$P(t_\alpha < t < t_\beta) = \Phi(t_\beta) - \Phi(t_\alpha), \quad (4)$$

где $t_\alpha = \frac{\alpha - a}{\sigma}$; $t_\beta = \frac{\beta - a}{\sigma}$;

a - математическое ожидание случайной величины;

σ - среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Определим вероятность того, что нормально распределенная величина x отклоняется от своего математического ожидания на величину меньшую чем ε , т.е. найдем вероятность осуществления неравенства $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Так как $t = \varepsilon/\sigma$, то

$$P(t_\alpha < t < t_\beta) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (5)$$

Окончательно имеем

$$P(|x - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad (6)$$

или

$$P(|x - a| < t\sigma) = \Phi(t). \quad (7)$$

Таким образом, значение $\Phi(t)$ при заданном параметре t определяет вероятность того, что отклонение нормально распределенной величины по абсолютному значению меньше $t\sigma$. Доверительная вероятность

$$P(|x - a| < \sigma) = \Phi(1) = 0,6827 \quad \text{при } t = 1 ;$$

$$P(|x - a| < 2\sigma) = \Phi(2) = 0,9545 \quad \text{при } t = 2 ;$$

$$P(|x - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0,9973 \quad \text{при } t = 3 .$$

Из последнего равенства следует, что практически рассеивание случайной величины укладывается на участке $M \pm 3\sigma$. Можно считать,

что предельным значением ошибки является величина 3σ , а в качестве допуска - ее удвоенное значение, т.е. $\delta = 6\sigma$.

Таким образом, осуществив вероятностный подход к оценке точности, необходимо проанализировать полученный ряд значений радиусов и отбраковать величины, превышающие установленный допуск.

2. Методика расчета оптимальных параметров сооружения

По результатам геодезической съемки определялось фактическое положение оси, при этом для определения координат X_i , Y_i , Z_i использовался электронный тахеометр SET 6F (фирмы «SOKKIA», Япония). Местом стояния тахеометра являлась замаркированная точка (СТ) с координатами

$$X_{CT} = 100.0000 \text{ м},$$

$$Y_{CT} = 100.0000 \text{ м}.$$

Обработку результатов измерений выполняют согласно нижеприведенной методике:

1. По координатам точек в каждом поясе вычисляются длины хорд

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}. \quad (8)$$

2. По найденным значениям l определяют радиусы описанной окружности треугольника, заданного координатами вершин 1(X_{i-1}, Y_{i-1}), 2(X_i, Y_{ii}), 3(X_{i+1}, Y_{i+1}) (рис.2):

$$R_i = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3}{\sqrt{4 \cdot l_3^2 \cdot l_2^2 - (l_1^2 - l_2^2 - l_3^2)^2}}. \quad (9)$$

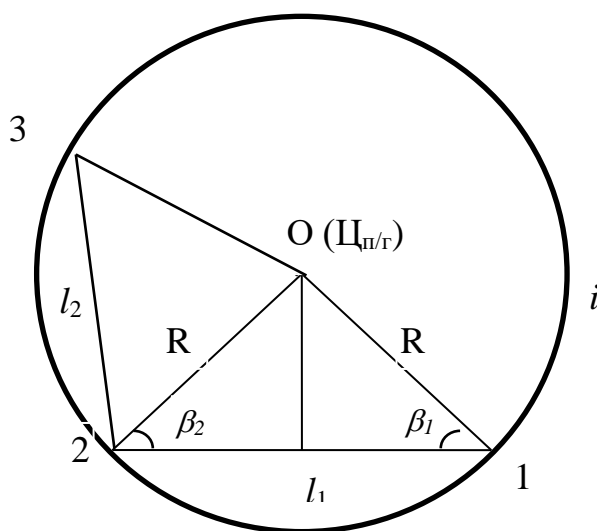


Рис. 2 Схема элементов оптимальной окружности

При этом число радиусов R_i , полученных путем вычисления по образованным вариантам треугольников, будет соответствовать числу этих

треугольников k , вершинами которых являются исследуемые точки поясов. Значение k вычисляется по формуле

$$k = (n / 3) - (n^2 / 2) + (n^3 / 6), \quad (10)$$

где n - число точек, образующих пояс.

Для анализа технического состояния сооружения необходимо использовать все возможные варианты определения радиусов при решении треугольников. На рис. 3 показано число треугольников для 11-ти определяемых точек окружности, по которым вычислялись радиусы.

3. Оптимальный радиус R_{opt} окружности пояса будет равен арифметической середине из совокупности вычисленных значений

$$R_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{k}. \quad (11)$$

Величина оптимального радиуса R_{opt} является характерным геометрическим параметром исследуемого сечения.

4. Координаты центра оптимальной окружности определяют, реализуя следующее. В треугольниках (рис.2) находят углы β_1 и β_2

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \arccos\left(\frac{l_i}{2R}\right). \quad (12)$$

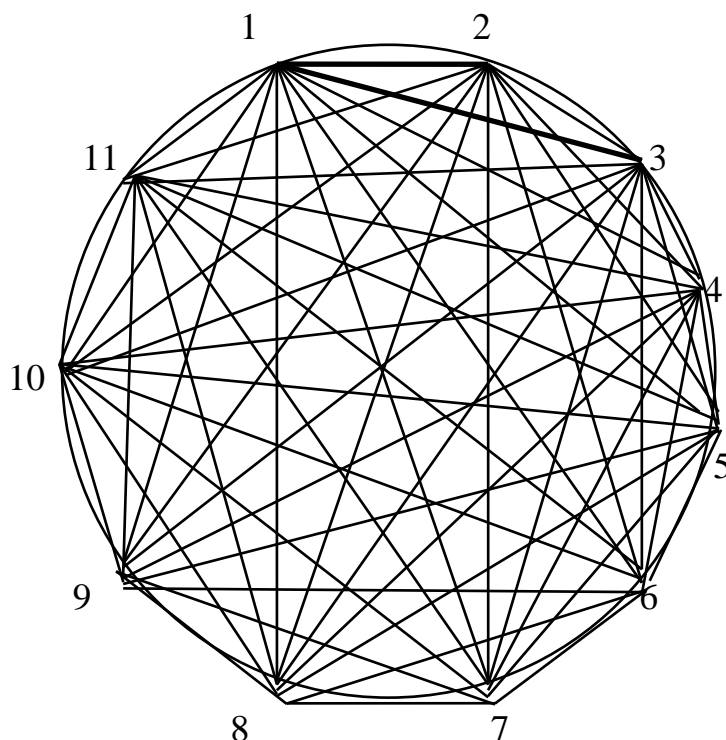


Рис. 3. Возможное число треугольников

Координаты центра (X_0 , Y_0) будут получены по формулам полярной засечки. Для этого вычисляем дирекционные углы направлений радиусов

$$\alpha_{0-i} = \alpha_{i-(i+1)} + 180^\circ - \beta, \quad (13)$$

где

$$\alpha_{i-(i+1)} = \arctg\left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i}\right). \quad (14)$$

Искомые координаты $(X_{0(i)}, Y_{0(i)})$ определяются по известным формулам

$$\begin{aligned} X_{0(i)} &= X_i + R_{ОПТ} \cdot \cos \alpha_{0-i}; \\ Y_{0(i)} &= Y_i + R_{ОПТ} \cdot \sin \alpha_{0-i}. \end{aligned} \quad (15)$$

5. Вероятнейшие значения координат центра (X_0, Y_0) будут определены согласно нижеследующим выражениям:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_{0(i)}}{n}, \\ Y_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_{0(i)}}{n}. \end{aligned} \quad (16)$$

6. Используя координаты текущих точек (X_i, Y_i) и центра оптимальной окружности, находим фактические радиусы

$$R_\phi = \sqrt{(X_i - X_{0(i)})^2 + (Y_i - Y_{0(i)})^2}. \quad (17)$$

7. Вычисляем уклонения фактического радиуса R_ϕ от оптимального $R_{опт}$ в горизонтальной плоскости

$$v_x = R_\phi - R_{ОПТ}. \quad (18)$$

где v_x - отклонения пути от номинального (оптимального) положения по оси X ;

$$v_y = (R_\phi)^{-1} \cdot \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}. \quad (19)$$

где $X_{i,j}Y_{i,j}$ - координаты исследуемых точек в смежных циклах наблюдений;

v_y - отклонения пути от номинального положения по оси Y .

Вычисление радиусов и их отклонений от оптимального значения выполняется на ПВЭМ по соответствующей программе (tmogi12).

3. Вычисление эмпирических характеристик распределения

Практически при многократных измерениях полученные результаты x_1, x_2, \dots, x_n группируют по классам (интервалам), определяя частоту n_1, n_2, \dots, n_k появления этих результатов в соответствующем классе и вычисляя эмпирические (приближенные) значения вероятностей – частоты:

$$p_j = \frac{n_j}{n}, \quad (20)$$

где $j = 1, 2, \dots, k$ и

$$n = \sum_{j=1}^k n_j. \quad (21)$$

Применение систем классов необходимо при обработке больших рядов распределения случайной величины. Для определения шага интервала используют формулу Г. Стерджесса

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,2 \lg n}, \quad (22)$$

где x_{\max} , x_{\min} - соответственно максимальное и минимальное значения случайной величины;

n - число наблюдений.

Вычисляют накопленные частоты согласно

$$N_j = n_1 + n_2 + \dots + n_j. \quad (23)$$

Затем определяют накопленную частоту или эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$

$$F_n(x) = \frac{N_j}{n}. \quad (24)$$

На первоначальной стадии исследования эмпирических рядов распределения случайной величины X можно использовать графический метод. Чаще всего строят следующие графики: полигон (рис. 4), гистограмму (рис. 5), ступенчатый график накопленной частоты (рис. 6).

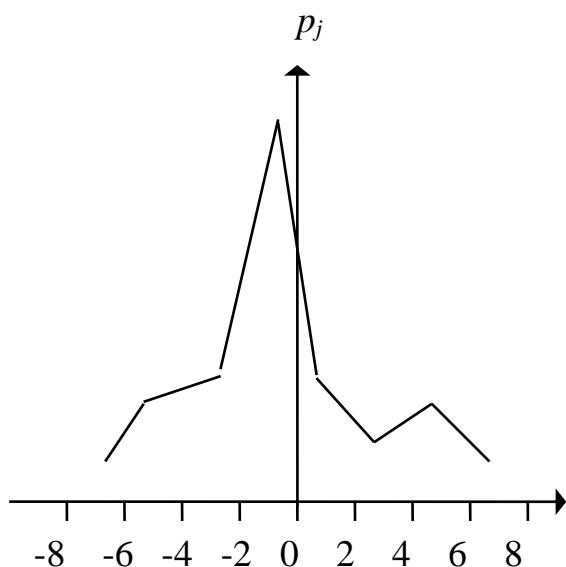


Рис. 4. Полигон

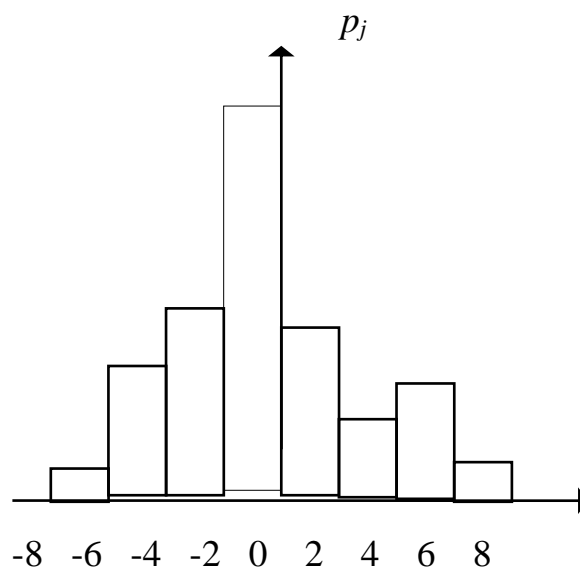


Рис. 5. Гистограмма

Чтобы получить более или менее правдоподобное представление о плотности распределения по гистограмме и о функции распределения по ступенчатому графику, производят сглаживание или выравнивание статистических рядов.

В случае равноточных измерений центром группирования будет простая арифметическая средина

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (25)$$

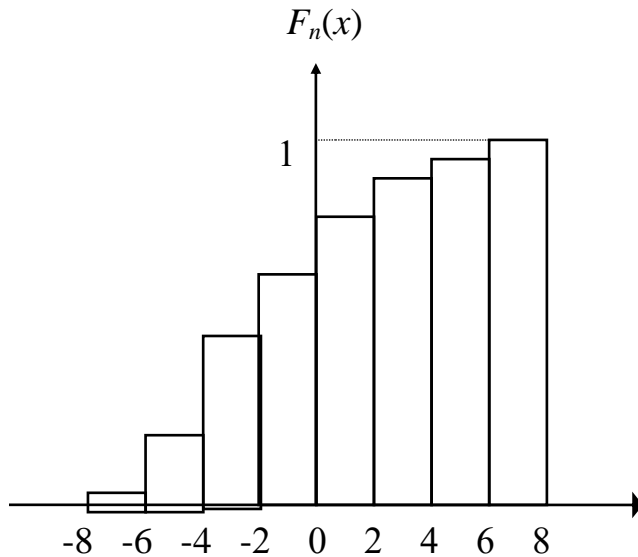


Рис. 6. График накопленной частоты

Для эмпирической или выборочной дисперсии, если

$$\Delta_i = x_i - a, \quad (26)$$

где a - истинное значение величины, т.е. $M(x) = a$, то

$$S(x) = \frac{1}{n} \sum (x_i - a)^2 . \quad (27)$$

Эмпирический или выборочный стандарт отдельного результата составит

$$s_x = m = \sqrt{S(x)} . \quad (28)$$

В практике геодезических измерений эмпирический стандарт чаще всего называют средней квадратической ошибкой. Если известно истинное значение измеряемой величины, то

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} . \quad (29)$$

При неизвестном действительном значении измеряемой величины средняя квадратическая ошибка определяется через отклонения результатов измерений от арифметической середины v_i

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} . \quad (30)$$

При обработке результатов измерений обычно вычисляются эмпирические значения моментов.

В случае больших рядов распределения возникает необходимость разбиения результатов измерения на классы (интервалы). В этом случае для каждого класса определяют частоту n_i или частость p_i . Поскольку при этом находят шаг класса, то вычисляют относительную середину класса

$$y_j = \frac{x_j - c}{\Delta x}, \quad (31)$$

где x_j - середина установленного класса (интервала);

c - “ложный нуль” (обычно принимается середина интервала с наибольшей частотой).

В дальнейшем используются относительные начальные моменты

$$\tilde{v}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \cdot y_j^s . \quad (32)$$

Тогда вероятнейшее значение измеряемой величины определится согласно

$$\bar{x} = \Delta x \cdot \tilde{v}_1 + c . \quad (33)$$

Эмпирические центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков вычисляются из следующих зависимостей

$$\mu_2^* = \Delta x^2 \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1^2) ; \quad (34)$$

$$\mu_3^* = \Delta x^3 \cdot (\tilde{v}_3 - 3\tilde{v}_2 \cdot \tilde{v}_1 + 2\tilde{v}_1^3) ; \quad (35)$$

$$\mu_4^* = \Delta x^4 \cdot (\tilde{v}_4 - 4\tilde{v}_3 \cdot \tilde{v}_1 + 6\tilde{v}_2 \cdot \tilde{v}_1^2 - 3\tilde{v}_1^4) . \quad (36)$$

После этого следует определить коэффициент асимметрии

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} . \quad (37)$$

При малом числе измерений стандарт асимметрии определяется

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} . \quad (38)$$

Если для обработки используется малая выборка, то

$$\sigma_A \approx \sqrt{\frac{6}{n+3}} \approx \sqrt{\frac{6}{n}} . \quad (39)$$

Асимметрию считают существенной тогда, когда имеет место следующее условие

$$|A_s| > t \cdot \sigma_A , \quad (40)$$

где t - определяется для заданного уровня значимости q согласно табл.1 приложения 3. Если выполняется условие (40), то асимметрией можно пренебречь.

Эксцесс или коэффициент крутости определяется согласно

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 . \quad (41)$$

Стандарт эмпирического эксцесса получаем

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}} \approx \sqrt{\frac{24(n-3)}{(n+3)(n+5)}} . \quad (42)$$

Эмпирический эксцесс считается существенным, если он значительно превышает стандарт σ_E , т.е. выполняется неравенство

$$|E_s| > 3\sigma_E . \quad (43)$$

Ниже приводится оценка точности вычисленных параметров распределения и осуществляется проверка гипотез о параметрах и полученной функции распределения.

4. Оценка точности параметров распределения

Приближенные значения параметров распределения, определяемые как функции результатов измерения, называются оценкам или статистиками. Статистиками являются арифметическая средина \bar{x} и средняя квадратическая ошибка m .

Пусть требуется по данным выборки объема n оценить параметр a , являющегося центром группирования генеральной совокупности. Установив закон распределения, нетрудно определить и вероятность $p = 1 - q$ предположения, что разность $\bar{x} - a$ не выйдет по абсолютному значению за некоторые установленные пределы

$$P(|\bar{x} - a| \leq \varepsilon) = 1 - q. \quad (44)$$

Если результатам измерений сопутствуют случайные ошибки, обладающие нормальным распределением, то статистика \bar{x} подчинена нормальному закону с параметрами распределения

$$M(x) = a; \quad \sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}. \quad (45)$$

Воспользуемся нормированной величиной

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\sigma(x)}, \quad (46)$$

которое имеет распределение, не зависящее от каких-либо параметров, с плотностью

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Пользуясь таблицей нормированной функцией Лапласа (табл. 1 приложения 3), определяем параметр t , а затем, учитывая

$$\bar{x} - a = t \cdot \sigma(\bar{x}) = \varepsilon,$$

будем иметь

$$P\{\bar{x} - t \cdot \sigma(\bar{x}) < a < \bar{x} + t \cdot \sigma(\bar{x})\} = p = \Phi(t) \quad (47)$$

или

$$P\left\{\bar{x} - t \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi(t). \quad (48)$$

Когда среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ не известно и требуется оценить неизвестное математическое ожидание $M(x) = a$, воспользуемся вместо $\sigma(x)$ эмпирическим стандартом или средней квадратической ошибкой m

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (49)$$

при этом

$$\bar{x} - t \frac{m}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad (50)$$

где $t = f(p, k)$; $k = n - 1$ - число степеней свободы.

Нормированная величина $t_{p,k}$ подчиняется распределению Стьюдента и определяется согласно табл. 2 приложения 3.

Следовательно, доверительная вероятность для оцениваемого параметра составит

$$P\left(\bar{x} - t_{p,k} \frac{m}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{p,k} \frac{m}{\sqrt{n}}\right) = 1 - q. \quad (51)$$

Поэтому с вероятностью (надежностью) $p = 1 - q$ можно утверждать, что интервал

$$\bar{x} - t_{p,k} \frac{m}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{p,k} \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (52)$$

является доверительным для оценки математического ожидания a .

Предполагая, что выборка произведена из нормальной совокупности, например, что n независимых наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n являются значениями нормально распределенной величины X , построим доверительный интервал для параметров σ и σ^2 .

Для выбранной доверительной вероятности $p = 1 - q$, учитывая, что ns^2/σ^2 имеет распределение χ^2 с $k = n - 1$ степенями свободы, можно определить

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{nm_x^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = 1 - q \quad (53)$$

или

$$P\left(\frac{nm_x^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{nm_x^2}{\chi_1^2}\right) = 1 - q. \quad (54)$$

Доверительный интервал находится с доверительной вероятностью $p = 1 - q$. Для заданного значения q и степеней свободы с $k = n - 1$ при определении величин χ_1^2 и χ_2^2 пользуются таблицами функции χ^2 - распределения (табл. 3 приложения 3). При этом значения χ_1^2 находят для $p_1 = 1 - 0,5q$, а значения χ_2^2 - для $p_2 = 0,5q$.

При $n > 30$ можно воспользоваться асимптотическим свойством χ^2 - распределения, утверждающим, что величина

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \quad (55)$$

подчиняется нормальному распределению с параметрами $M(t) = 0$ и $\sigma^2(t) = 1$. По формуле Лапласа имеем

$$P(|T| < t) = P(-t < T < t) = \Phi(t) = 1 - q, \quad (56)$$

где t определяется согласно (5), тогда

$$\chi_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2n-1} + t)^2. \quad (57)$$

В дальнейшем для интервальной оценки воспользуемся выражением (54).

5. Проверка статистических гипотез

Пусть имеем две выборки объемов соответственно n_1 и n_2 , при этом вычисляются средние значения \bar{x}_1 и \bar{x}_2 . Проверим нулевую гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий, т.е. $a_1 = a_2$.

Рассмотрим два случая: первый заключается в том, что средние квадратические отклонения (стандарты) σ_1^2 и σ_2^2 известны. Проверим гипотезу H_0 , имея в виду, что значение $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ выборочных средних подчиняется нормальному распределению, тогда

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}. \quad (58)$$

В качестве критерия проверки используем нормированную величину t разности $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}. \quad (59)$$

Критическая область определяется областью больших значений $|t| > t_q$, где t_q соответствует q -уровню значимости, при этом должно выполняться условие

$$P(|t| > t_q) = q. \quad (60)$$

Рассмотрим случай, когда значения дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 распределений неизвестны. Описанный выше способ не применим. В качестве критерия используют нормированный параметр $t_{p,k}$ распределения Стьюдента

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (61)$$

где $n_1 + n_2 - 2 = k$ - степень свободы.

При этом устанавливается выполнение следующих условий

$$\begin{aligned} |t| &< t_{p,k}; \\ |t| &> t_{p,k}. \end{aligned} \quad (62)$$

В первом случае можно утверждать, что нулевая гипотеза H_0 не противоречит результатам измерений, а во втором случае наблюдаемое расхождение считаем существенным и нулевую гипотезу H_0 отвергаем.

Для проверки гипотез о равенстве дисперсий в двух генеральных совокупностях по независимым выборкам необходимо определить

критерий, который не зависит от каких-либо неизвестных параметров. Этому требованию удовлетворяет отношение двух эмпирических дисперсий, вычисленных по этим выборкам

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = F > 1, \quad (63)$$

причем в качестве числителя берется наибольшая из двух дисперсия.

F - распределение (Фишера-Снедекора) зависит только от степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, если объем выборок соответственно n_1 и n_2 .

Чтобы проверить гипотезу о равенстве дисперсий нужно построить критическую область для критерия F (рис. 17), т.е.

$$F > F_2;$$

$$0 < F < F_1$$

или

$$P(F > F_2) = 0,5q;$$

$$P(F < F_1) = 0,5q. \quad (64)$$

В том случае, если вычисленное значение критерия F попадает в критическую область, т.е. оказывается вне допустимых значений F_1 и F_2 , то гипотеза о равенстве дисперсий отвергается. Предельные значения F_q представлены в табл. 4 приложения 3.

В результате независимых измерений получено эмпирическое распределение значений случайной величины x_1, x_2, \dots, x_n . Предполагается, что случайная величина X имеет теоретическую непрерывную функцию распределения $F(x)$. По выборочным данным находится эмпирическая функция $F_n(x)$. Критерий согласия Колмогорова основан на сопоставлении эмпирической функции $F_n(x)$ с теоретическими значениями $F(x)$. Для этого определим разности $|F_n(x) - F(x)|$.

Максимальное значение этой разности

$$D_n^0 = \max |F_n(x) - F(x)| \quad (65)$$

представляет собой величину, предельное значение которой было установлено Колмогоровым. Распределение Колмогорова выражает предельную вероятность того, что значение D_n , умноженное на \sqrt{n} , не превосходит заданного числа λ , т.е.

$$\lim P(D \cdot \sqrt{n} \leq \lambda) = K(\lambda) \quad (66)$$

какой бы ни была непрерывная функция $F(x)$. На основании предельного соотношения (66) можно написать при большом числе измерений n следующее приближенное равенство

$$P\left\{F(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \leq F_n(x) \leq F(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} \approx K(\lambda). \quad (67)$$

Значения функции

$$P\{D_n\sqrt{n} > \lambda\} = 1 - K(\lambda) \quad (68)$$

представлены в табл. 5 приложения 2. Критическая область

$$D > \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}. \quad (69)$$

Сравнивая эмпирические значения функции частот $F_n(x)$ со значениями теоретической функции $F(x)$ и выбрав наибольшую величину разности (по абсолютному значению) D_n^0 , находим

$$\lambda_0 = D_n^0 \cdot \sqrt{n}. \quad (70)$$

Для этого значения λ_0 по табл. 5 приложения 3 выбирают значение $1 - K(\lambda_0)$. Если табличное значение $1 - K(\lambda)$ при данном уровне значимости q окажется мало, т.е. не более q , то это значит, что осуществилось маловероятное событие и расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями можно считать существенным. При этом выполняется условие $\lambda_0 > \lambda_q$.

В противном случае, когда табличное значение не мало, тогда расхождение между распределениями можно признать случайным, следовательно, гипотезу о нормальности распределения следует считать согласованной. При этом имеет место неравенство $\lambda_0 < \lambda_q$.

Интегральная функция распределения

$$F(x) = 0,5 + \Phi(t). \quad (71)$$

Значения функции $\Phi(t)$ находят по табл. 1 приложения 3 согласно вычисленному нормированному параметру

$$t = \frac{\beta_i - \bar{x}}{\sigma}, \quad (72)$$

где β_i - правая граница интервала или класса.

Так как при использовании выборок большого объема обычно выполняют группирование и нормирование значений случайной величины, то целесообразнее применить для проверки гипотезы нормальности распределения статистику, которая не зависела бы от неизвестных параметров. Такой статистикой является χ^2 . Поэтому в соответствии с выдвинутой гипотезой о нормальности распределения вычисляют вероятности p_1, p_2, \dots, p_r попадания значений в соответствующий интервал (22)

$$p_j = \Phi(t_\beta) - \Phi(t_\alpha),$$

где $j = 1, 2, \dots, r$ - число классов или интервалов.

В том случае, если частота в интервале (классе) равна n_j , то статистика χ^2 определяется

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(n_j - n_j^0)^2}{n_j^0}, \quad (73)$$

где $n_j^0 = n \cdot p_j$.

При нормальном распределении эмпирического ряда эта статистика имеет почти χ^2 -распределение с числом степеней свободы

$$k = r - l, \quad (74)$$

где l - число определяемых параметров распределения.

В нашем случае, когда при вычислении частот использовали среднее значение, среднее квадратическое отклонение и объем выборки, параметр l будет равен 3, т.е. $k = r - 3$.

Критическая область будет

$$\chi^2 > \chi_q^2. \quad (75)$$

Если нулевая гипотеза неверна, то χ^2 оказывается настолько большим, что даже при сравнительно малых значениях q попадает в критическую область. В этом случае гипотеза о соответствии эмпирического ряда нормальному закону распределения отвергается. В противном случае расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями можно считать случайным.

Пример обработки полученных значений радиусов оси радиального мостового крана представлен в приложении А.

Для выполнения курсовой работы студенты используют исходные данные согласно предложенному варианту (приложение Б).

Библиографический список

1. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. М.: Альянс, 2015.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов. М.: Высш. шк., 2003. 405 с.
3. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учебное пособие для вузов/ Серия «Высшее образование». Ростов н/Д: Феникс, 2005. 480 с.
3. Губеладзе А.Р. Основы теории ошибок измерений: Учебное пособие.- Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 1998.- 106 с.
4. Губеладзе А.Р., Яговкина Е.Н. Статистическая обработка результатов измерений: уч. пособие.- Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 1999.- 130 с.
5. Гудков В.М., Хлебников А.В. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений: Учебник для вузов.- М.: Недра, 1990.- 335 с.
6. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: Справочное пособие.- М.: Картогеоцентр - Геодезиздат, 1994.- 431 с.

Пример обработки результатов эксперимента

На предварительном этапе, используя исходные данные (координаты X_i и Y_i наблюдаемых точек), вычисляют радиусы оси радиального мостового крана. Значения радиусов и отклонения от оптимального определяют на компьютере по программе «ТМОГИ». По координатам одиннадцати точек получено 165 значений радиусов. Оптимальный радиус $R_{opt} = 21,460$ м. Сумма отклонений $\sum v = 0$, а сумма квадратов отклонений $\sum vv = 0,0413$. Вычислим среднюю квадратическую ошибку результата

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,0413}{165-1}} = 16 \text{ мм}$$

Значения радиусов, отклонения которых от оптимального значения превышают m , необходимо исключить из полученного ряда. Таких значений оказалось 32. Оставшийся массив из 133 значений радиусов необходимо проанализировать вероятностно-статистическим методом.

Данный ряд необходимо сгруппировать. Для этого определим шаг интервала согласно формуле (22):

$$\Delta x = \frac{21,476 - 21,444}{1 + 3,2 \cdot \lg 133} = 0,004 \text{ мм}.$$

После этого устанавливают границы интервалов и определяют количество значений радиусов в соответствующем интервале, т.е. находят частоту n_j появления величин радиусов в каждом интервале, а затем вычисляют частоты p_j и накопленную частоту или эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ соответственно по формулам (20) и (23). Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

№ пп	Границы интервалов α_j β_j		Частоты n_j	Частоты p_j	Накопленная частота
1	21,444	21,448	2	0,015	0,022
2	21,448	21,452	9	0,067	0,089
3	21,452	21,456	26	0,194	0,283
4	21,456	21,460	25	0,187	0,470
5	21,460	21,464	20	0,149	0,619
6	21,464	21,468	22	0,164	0,783
7	21,468	21,472	23	0,172	0,955
8	21,472	21,476	6	0,045	1,000
Суммы			133	1,000	

Для вычисления эмпирических характеристик данного ряда распределения воспользуемся начальными и центральными моментами, которые находятся по формулам (32), (34) – (36). Сначала найдем

относительную середину интервалов y_j по формуле (31). Вычисления выполняются в табл. 2.

Таблица 2

№ пп	Середина интервала x_j	Относи- тельная середина y_j	Частота n_j	$n_j y_j$	$n_j y_j^2$	$n_j y_j^3$	$n_j y_j^4$
1	21,446	-3	2	-6	18	-54	162
2	21,450	-2	9	-18	36	-72	144
3	21,454	-1	26	-26	26	-26	26
4	21,458	0	25	0	0	0	0
5	21,462	1	20	20	20	20	20
6	21,466	2	22	44	88	176	352
7	21,470	3	23	69	207	621	1863
8	21,474	4	6	24	96	384	1536
С у м м ы			133	107	491	1049	4103
Относительные начальные моменты				0,80	3,69	7,89	30,85

Вероятнейшее значение радиуса оси пути радиального мостового крана определится по формуле (33):

$$\bar{x} = 0,004 \cdot 0,80 + 21,458 = 21,4612 \text{ м.}$$

Находим центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков:

$$\mu_2^* = 0,004^2 \cdot (3,69 - 0,80^2) = 4,88 \cdot 10^{-5};$$

$$\mu_3^* = 0,004^3 \cdot (7,89 - 3 \cdot 3,69 \cdot 0,80 + 2 \cdot 0,80^3) = 3,71 \cdot 10^{-8};$$

$$\mu_4^* = 0,004^4 \cdot (30,85 - 4 \cdot 7,89 \cdot 0,80 + 6 \cdot 3,69 \cdot 0,80^2 - 3 \cdot 0,80^4) = 4,75 \cdot 10^{-9}.$$

Поскольку центральный момент второго порядка является дисперсией случайной величины, то средняя квадратическая ошибка составит

$$m = \sqrt{4,88 \cdot 10^{-8}} = 0,007 \text{ м} = 7 \text{ мм.}$$

Вычислим асимметрию A_s и эксцесс эмпирического распределения E_s соответственно по формулам (37) и (41):

$$A_s = \frac{3,71 \cdot 10^{-8}}{0,007^3} = 0,11;$$

$$E_s = \frac{4,75 \cdot 10^{-9}}{0,007^4} - 3 = -1,04.$$

Выполним оценку точности параметров распределения, т.е. определим доверительные интервалы для математического ожидания a и стандарта σ (x). Для нахождения доверительных интервалов воспользуемся зависимостями (48) и (54), приняв уровень значимости равный 0,05, т.е. задаемся доверительной вероятностью $p = 0,95$. Тогда

$$P\left(21,4612 - 1,96 \frac{0,007}{\sqrt{132}} \leq a \leq 21,4612 + 1,96 \frac{0,007}{\sqrt{132}}\right) = 0,95.$$

Откуда

$$(21,4612 - 0,1194 \leq a \leq 21,4612 + 0,1194); \\ 21,3418 \leq a \leq 21,4806.$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения составит

$$P\left(\frac{133 \cdot 7^2}{152,21} \leq \sigma^2 \leq \frac{133 \cdot 7^2}{91,58}\right) = 0,95.$$

Откуда

$$42,82 \leq \sigma^2 \leq 71,16; \\ 6,54 \leq \sigma \leq 8,44.$$

Произведем проверку гипотез как о параметрах распределения, так и самом распределении.

Возьмем две выборки нашего распределения: при $n_1 = 165$ и $n_2 = 133$ и выдвинем гипотезу о равенстве центров распределения. Сначала сравним вероятнейшие значения радиусов $R_1 = 21,4599$ м и $R_2 = 21,4612$ м.

Определим среднюю квадратическую ошибку разности по формуле (58):

$$\sigma_{1-2} = \sqrt{\frac{16^2}{165} + \frac{7^2}{133}} = 1,38 \text{ мм.}$$

При заданном уровне значимости $q = 0,05$ имеем

$$|R_1 - R_2| = 1,3 \text{ мм} < t_q \sigma_{1-2} = 1,96 \cdot 1,38 = 2,70 \text{ мм.}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что оба распределения взяты из одной генеральной совокупности.

Проверяем гипотезу о равенстве дисперсий. Воспользуемся критерием Фишера-Снедекора (63). В качестве исходных данных возьмем средние квадратические ошибки первого ряда $m_1 = 5$ мм и второго – $m_2 = 7$ мм. Вычисляем параметр F :

$$F = \frac{256}{49} = 5,22.$$

Полученное значение сравниваем с табличным, которое при уровне значимости $q = 0,025$ составит $F_q = 1,76$. Следовательно, не смотря на то, что оба ряда принадлежат одной совокупности, по точности они являются неоднородными.

На заключительном этапе проверяем гипотезу о законе распределения. Выдвигается гипотеза о соответствии эмпирического распределения нормальному закону. Для этого можно воспользоваться критерием согласия Колмогорова, в основу которого положено сравнение

эмпирической функции распределения $F_n(x)$ с теоретической функцией распределения $F(x)$. Вычисления выполняются в табл. 3.

Таблица 3

№ пп	Границы интервалов α_j β_j		$F_n(x)$	t	$\Phi(t)$	$F(x)$	$ F_n(x) - F(x) $
1	21,444	21,448	0,022	-1,89	-0,4706	0,0294	0,0074
2	21,448	21,452	0,089	-1,31	-0,4049	0,0951	0,0061
3	21,452	21,456	0,283	-0,74	-0,2704	0,2296	0,0534
4	21,456	21,460	0,470	-0,17	-0,0675	0,4325	0,0375
5	21,460	21,464	0,619	0,40	0,1554	0,6554	0,0364
6	21,464	21,468	0,783	0,98	0,3364	0,8364	0,0534
7	21,468	21,472	0,955	1,54	0,4382	0,9382	0,0186
8	21,472	21,476	1,000	2,11	0,4826	0,9826	0,0174

Нормированный параметр t вычисляется по формуле (72), по которому согласно табл. 1 приложения 3 находится функция Лапласа. Интегральная функция $F(x)$ определится из выражения (71).

Вычислим разности между эмпирической $F_n(x)$ и теоретической $F(x)$ функциями распределения. По наибольшей разности найдем параметр λ_0 по формуле (70):

$$\lambda_0 = 0,0534 \cdot \sqrt{133} = 0,616.$$

Согласно табл. 4 приложения 3 по значению $\lambda_0 = 0,616$ находим величину $1 - K(\lambda_0) = 0,87$, по которой определяем значение $\lambda_q = 1,18$.

Таким образом, $\lambda_0 < \lambda_q$, а следовательно, расхождение между распределениями является случайным и гипотезу о нормальности распределения следует считать согласованной.

Проверим эту же гипотезу с помощью χ^2 - распределения (табл. 4).

Таблица 4

№ пп	Границы интервалов α_j β_j		Частота n_j	p_j	n_j^o	$n_j - n_j^o$	$(n_j - n_j^o)^2$	$\frac{(n_j - n_j^o)^2}{n_j^o}$
1	21,444	21,448	2	0,023	4	2	4	1,00
2	21,448	21,452	9	0,066	9	0	0	0
3	21,452	21,456	26	0,135	19	7	49	2,58
4	21,456	21,460	25	0,203	27	-2	4	0,15
5	21,460	21,464	20	0,223	30	-10	100	3,33
6	21,464	21,468	22	0,181	24	-2	4	0,17
7	21,468	21,472	23	0,103	14	9	81	5,78
8	21,472	21,476	6	0,045	6	0	0	0
			133	0,979	133			13,01

Вероятность p_j определится по формуле (22). Выравнивающие частоты находятся из выражения $n_j^o = n \cdot p_j$. Значение χ^2 вычисляем

согласно формуле (73), которое сравниваем с табличным значением при заданном уровне значимости и степени свободы $k = r - l = 8 - 3 = 5$.

Вычисленное значение $\chi^2 = 13,01 > \chi_q^2 = 11,07$. В данном случае расхождение между распределениями можно считать существенным и гипотеза о соответствии эмпирического распределения нормальному закону отвергается.

Таким образом, можно считать, что величины радиусов, полученные по результатам геодезических измерений координат точек, расположенных на оси пути радиального мостового крана, являются случайными величинами и не содержат систематических ошибок.

После выполненного исследования эмпирического ряда распределения необходимо определить элементы рихтовки фактической оси пути радиального мостового крана. Для этого сначала, используя формулы (13) - (16), определяют координаты центра оптимальной окружности X_0 и Y_0 , значения которых для предлагаемого примера составят $X_0 = 96,2646$ м, $Y_0 = 96,0546$ м.

По координатам наблюдаемых точек и центра оптимального положения оси пути вычисляем расстояния R_i от радиуса R_0 будут являться элементами рихтовки оси пути в определяемых точках. Результаты вычислений представлены в табл. 5.

Таблица 5

№ точек	Координаты, м		R_0	R_i	V_i , мм
	X	Y			
Центр	96,2646	96,0546	21,4597	-	-
1			21,4597	21,4717	+12,0
2			21,4597	21,4551	- 4,6
3			21,4597	21,4512	- 8,5
4			21,4597	21,4551	- 4,6
5			21,4597	21,4660	+ 6,3
6			21,4597	21,4650	+ 5,2
7			21,4597	21,4546	- 5,2
8			21,4597	21,4612	+ 1,5
9			21,4597	21,4493	- 10,4
10			21,4597	21,4638	+ 4,1
11			21,4597	21,4695	+ 9,7

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Варианты исходных данных

№ пп	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	115,9074	119,9461	118,3129	116,7776	120,0904	113,2260	74,7923	96,0553
2	121,1759	101,4970	120,0857	97,6691	115,9100	90,9536	83,3849	113,2155
3	113,1547	88,4310	109,7965	86,3081	106,1052	84,8425	94,3918	117,4246
4	102,2032	84,0866	98,2308	84,0636	94,3193	84,7675	105,7564	115,2938
5	90,6021	86,1823	87,2089	88,2584	84,2654	90,9211	116,2700	103,8195
6	81,8647	94,0875	80,0829	97,6418	78,9920	101,4583	117,3662	100,0003
7	78,6227	105,4159	79,0003	109,3688	80,0859	113,1939	116,2668	88,2648
8	84,2501	119,9168	87,0155	122,4571	90,3782	124,5796	109,1375	78,8900
9	94,0734	126,0374	97,9764	126,7877	101,9477	126,8157	98,1317	74,6751
10	105,8617	126,1009	109,5754	124,6904	112,9627	122,6128	86,7666	76,8107
11	112,9627	122,6128	112,9627	122,6128	118,3129	116,7776	78,0322	84,7249

№ пп	Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	75,1621	100,0161	76,2539	103,8344	74,8408	95,7991	75,1710	99,7636
2	86,7709	115,2948	90,4854	116,7149	83,2518	113,0365	86,6219	115,1533
3	98,1319	117,4188	102,0439	116,7132	94,2114	117,3572	97,9560	117,3932
4	109,1413	113,2098	114,4890	107,3748	105,5988	115,3453	109,0031	113,2946
5	117,3662	96,0426	116,2668	86,2648	117,3556	100,1681	117,7616	96,2166
6	114,4932	84,7145	109,1375	78,8900	116,3758	88,4289	114,6329	84,8576
7	105,7502	76,8056	98,1317	74,6751	109,3372	78,9856	105,9734	76,8699
8	94,3832	74,6774	86,7666	76,8107	98,3825	74,6667	94,6553	74,6315
9	83,3780	78,8890	78,0322	84,7249	86,9990	76,6851	83,5916	78,7242
10	76,2545	88,2751	74,7923	96,0553	78,1930	84,5027	75,2455	91,8501
11	75,1592	92,0991	83,3849	113,2155	75,2455	91,8501	76,2227	103,5904

№ пп	Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	76,2227	103,5904	74,7929	96,0499	75,1631	100,0123	76,2544	103,8328
2	90,3164	116,6126	83,3814	113,2111	86,7702	115,2948	90,4843	116,7175
3	101,0733	116,7244	94,3903	117,4238	98,1342	117,4192	102,0454	116,7127
4	114,4095	107,5149	105,7579	115,2952	109,1428	113,2102	114,4919	107,3745
5	117,4255	92,2575	117,3655	99,9973	117,7334	96,0487	117,3570	92,0894
6	112,2665	81,6701	116,2664	88,2653	114,4909	84,7165	112,0916	81,5488
7	102,2807	75,4107	109,1391	78,8923	105,7520	76,8085	102,0418	75,3838
8	90,7181	75,2997	98,1359	74,6752	94,3868	74,6795	90,4787	75,3853
9	80,6201	81,3655	86,7999	76,8065	83,3770	78,8848	80,4359	81,5551
10	74,8408	95,7991	78,0344	84,7253	75,1618	92,0979	74,7929	96,0499
11	83,2518	113,0365	75,1631	100,0123	76,2544	103,8328	83,3814	113,2111

Продолжение прил. 2

№ пп	Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15		Вариант 16	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	74,7954	96,0544	75,1652	100,0156	76,2549	103,8324	74,7997	96,0524
2	83,3830	113,2123	86,7700	115,2944	90,4860	116,7175	90,4925	116,7127
3	94,3924	117,4245	98,1368	117,4198	102,0504	116,7106	105,7564	115,2879
4	105,7598	115,2931	109,1429	113,2106	114,4899	107,3736	114,4876	107,3731
5	117,3660	100,0010	117,7327	96,0477	117,3585	92,0858	117,7327	96,0442
6	116,2677	88,2625	114,4932	84,7135	112,0921	81,5456	114,4899	84,7143
7	109,1365	78,8887	105,7473	76,8043	102,0395	75,3841	94,3849	74,6812
8	98,1341	74,6749	94,3835	74,6784	90,4746	75,3841	83,3837	78,8920
9	86,7679	76,8095	83,3764	78,8883	80,4336	81,5585	76,2575	88,2795
10	78,0346	84,7265	75,1602	92,0981	74,7954	96,0544	76,2601	103,8292
11	75,1652	100,0156	76,2549	103,8324	83,3830	113,2123	98,1326	117,4149

№ пп	Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	76,2601	103,8292	86,7738	115,2955	74,7993	96,0547	76,2599	103,8352
2	98,1326	117,4149	102,0424	116,7069	90,4850	116,7121	98,1370	117,4125
3	109,1389	113,2045	112,0813	110,5290	105,7550	115,2911	109,1415	113,2075
4	116,2680	103,8145	117,3622	99,9964	116,2660	103,8159	117,3617	99,9985
5	117,3582	92,0870	116,2656	88,2648	117,3515	92,0888	116,2611	88,2664
6	112,0914	81,5475	102,0401	75,3869	112,0860	81,5494	102,0374	75,3883
7	90,4759	75,3863	86,7709	76,8132	90,4797	75,3898	86,7689	76,8163
8	80,4396	81,5606	78,0411	84,7279	80,4419	81,5640	78,0398	84,7323
9	75,1646	92,0999	74,7997	96,0524	75,1679	92,0995	74,7993	96,0547
10	86,7738	115,2955	90,4925	116,7127	86,7736	115,2910	90,4850	116,7121
11	102,0424	116,7069	105,7550	115,2911	102,0472	116,7069	86,7736	115,2910

№ пп	Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	86,7736	115,2910	98,2542	85,6762	94,2746	85,8209	74,7952	96,0517
2	102,0472	116,7069	86,7541	88,2701	83,4577	90,4961	78,0346	107,3883
3	114,4879	107,3720	81,6900	122,0878	84,7160	124,6658	98,1295	117,4216
4	117,7278	96,0431	99,8120	128,3877	103,6881	127,5127	109,1386	113,2182
5	114,4865	84,7159	110,6278	123,7251	114,9046	95,2148	116,2683	103,8286
6	94,3812	74,6849	109,3756	89,5480	98,2542	85,6762	117,3587	92,0930
7	90,4797	75,3898	90,4027	86,6967	90,4027	86,6967	112,0937	81,5474
8	80,4419	81,5640	79,1912	118,9984	79,1912	118,9984	94,3983	74,6794
9	75,1679	92,0995	95,8404	128,3877	95,8404	128,5391	83,3841	78,8921
10	76,2599	103,8352	107,3328	125,9413	107,328	125,9413	76,2597	88,2787
11	98,1370	117,4125	94,2746	85,8209	112,4035	92,1262	75,1675	92,0995

Продолжение прил. 2

№ пп	Вариант 25		Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	75.1677	100.0125	76.2529	103.8313	74.7944	96.0523	75,1681	100,0140
2	86.7632	115.2916	90.4841	116.7176	78.0344	107.3883	86,7629	115,2906
3	102.0417	116.7181	105.7536	115.3024	98.1323	117.4208	102,0412	116,7174
4	112.0872	110.5464	114.4911	107.3800	109.1386	113.2188	112,0855	110,5483
5	117.3664	100.0045	117.7333	96.0535	116.2697	103.8251	117,3665	100,0030
6	116.2699	88.2674	114.4942	84.7165	117.3596	92.0942	116,2694	88,2679
7	109.1421	78.8966	102.0498	75.3880	112.0931	81.5464	109,1424	78,8949
8	90.4829	75.3855	86.7717	76.8115	94.3975	74.6794	90,4824	75,3850
9	80.4425	81.5581	78.0404	84.7270	83.3855	78.8914	80,4427	81,5585
10	75.1645	92.0959	74.7952	96.0517	76.2585	88.2789	75,1648	92,0964
11	76.2529	103.8813	78.0346	107.3883	75.1681	100.0140	74,7944	96,0523

№ пп	Вариант 29		Вариант 30		Вариант 31		Вариант 32	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	-3,951	-25,200	3,826	-23,745	-3,939	-25,198	10,556	-19,558
2	7,386	-21,969	13,204	-16,620	10,556	-19,558	16,713	-9,508
3	15,290	-13,228	17,420	-5,616	16,713	-9,508	16,707	2,049
4	16,710	2,046	15,293	5,750	16,707	2,049	13,206	9,141
5	7,502	14,409	7,502	14,409	7,483	14,419	0,003	17,358
6	-3,953	17,730	-3,953	17,730	-3,950	17,729	-11,739	16,262
7	-15,283	14,495	-15,283	14,495	-15,288	14,493	-21,115	9,130
8	-23,191	5,745	-21,112	9,133	-23,190	5,745	-24,614	2,041
9	-25,322	-1,870	-24,614	2,043	-25,319	-5,595	-25,319	-5,595
10	-23,190	-13,230	-24,615	-9,521	-23,190	-13,229	-23,190	-13,229
11	-18,440	-19,566	-21,114	-16,616	-15,279	-21,964	-15,279	-21,964

№ пп	Вариант 33		Вариант 34		Вариант 35		Вариант 36	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	7,386	-21,969	10,545	-19,566	123,949	102,086	80,958	96,148
2	15,290	-13,228	16,712	-9,520	124,684	95,194	81,685	90,298
3	17,420	-5,616	16,710	2,046	123,180	88,464	85,730	82,056
4	15,293	5,750	3,812	16,269	120,464	83,719	95,105	75,083
5	7,502	14,409	-7,912	17,359	116,626	79,853	103,302	73,435
6	-0,003	17,362	-18,452	12,087	96,180	76,934	117,427	78,230
7	-11,733	16,266	-24,614	2,043	91,352	79,201	121,490	82,462
8	-21,112	9,133	-25,322	-5,607	87,359	82,859	125,250	89,991
9	25,322	-1,870	-21,114	-16,616	85,074	86,221	125,816	99,155
10	-23,190	-13,230	-3,951	-25,200	84,457	87,445	117,039	114,039
11	-3,951	-25,200	3,826	-23,745	83,264	91,304	109,507	117,732

Продолжение прил. 2

№ пп	Вариант 37		Вариант 38		Вариант 39		Вариант 40	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	93,203	114,410	95,089	115,374	95,089	115,374	111,332	115,808
2	98,314	116,522	109,309	116,470	105,912	117,111	120,243	109,302
3	105,912	117,111	120,243	109,302	116,214	113,152	124,776	93,563
4	114,435	114,322	124,686	99,156	124,686	99,156	121,061	83,917
5	122,204	106,418	121,806	85,090	121,061	83,917	113,858	77,470
6	124,912	95,691	113,858	77,470	112,616	76,831	103,193	74,918
7	121,061	83,917	103,193	74,918	101,088	75,034	95,793	76,426
8	108,692	75,501	92,121	78,372	90,989	79,126	87,107	82,949
9	95,793	76,426	84,876	86,428	84,876	86,428	82,815	92,894
10	87,107	82,949	82,815	92,894	82,815	92,894	93,204	114,410
11	82,815	92,894	82,688	98,386	82,688	98,386	105,912	117,111

№ пп	Вариант 41		Вариант 42		Вариант 43		Вариант 44	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	116,214	113,152	103,797	117,228	114,436	114,322	105,912	117,111
2	124,686	99,156	111,332	115,808	122,204	106,417	114,435	114,322
3	123,391	88,152	120,243	109,302	124,912	95,691	122,204	106,418
4	117,324	79,802	124,912	95,691	121,061	83,917	124,912	95,691
5	108,691	75,501	121,806	85,090	113,858	77,470	121,061	83,917
6	95,793	76,426	117,324	79,802	103,193	74,918	112,616	76,831
7	87,107	82,949	112,616	76,831	92,121	78,372	103,193	74,918
8	83,050	91,558	106,616	75,077	84,270	87,662	92,121	78,372
9	98,314	116,522	97,791	75,775	82,688	98,386	84,876	86,428
10	105,912	117,111	87,994	81,910	98,314	116,522	82,688	98,386
11	111,332	115,808	82,815	92,894	109,309	116,470	95,089	115,374

№ пп	Вариант 45		Вариант 46		Вариант 47		Вариант 48	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	116,517	113,456	74,7552	96,0143	95,089	115,374	84,456	87,443
2	124,985	99,458	83,3429	113,1722	105,912	117,111	88,288	81,851
3	123,700	88,457	94,3525	117,3846	116,214	113,152	96,176	76,932
4	117,625	80,103	105,7198	115,3530	124,686	99,156	117,693	80,712
5	108,992	75,803	117,3260	99,9610	121,806	85,090	121,246	84,839
6	96,094	76,727	116,2276	88,2224	113,858	77,470	123,670	89,743
7	87,405	83,250	109,0964	78,8488	106,616	75,077	123,956	102,084
8	83,351	91,859	98,0941	74,6350	95,793	76,426	111,204	116,230
9	98,614	116,823	86,7278	76,7696	87,107	82,949	105,712	117,514
10	106,213	117,412	77,9945	84,6864	83,050	91,558	93,387	115,036
11	111,633	116,109	75,1250	99,9755	82,688	98,386	85,290	107,122

Окончание прил. 2

№ пп	Вариант 49		Вариант 50		Вариант 51		Вариант 52	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	115,907	119,946	118,313	116,778	75,1621	100,0161	76,2539	103,8344
2	120,086	97,669	115,910	90,954	90,4854	116,7149	83,2518	113,0365
3	113,155	88,431	109,796	86,308	98,1319	117,4188	102,0439	116,7132
4	98,231	84,064	94,319	84,768	114,4890	107,3748	105,5088	115,3453
5	90,602	86,182	87,209	88,258	117,3662	96,0426	116,2668	86,2648
6	80,083	97,642	78,992	101,458	109,1375	78,8900	116,3758	88,4289
7	78,623	105,416	79,000	109,369	105,7502	76,8056	98,1317	74,6751
8	87,016	122,457	90,378	124,580	86,7666	76,8107	86,9990	76,6851
9	94,073	126,0374	97,976	126,788	83,3780	78,8890	78,0322	84,7249
10	109,575	124,690	112,963	122,612	74,79,23	96,0553	78,1930	84,5027
11	112,963	122,613	120,090	113,226	75,1592	92,0991	83,3849	113,2155

№ пп	Вариант 53		Вариант 54		Вариант 55		Вариант 56	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	74,8408	95,7991	75,1710	99,7636	75,1631	100,0123	83,3770	78,8848
2	86,6219	115,1533	83,2518	113,0365	86,6219	115,1533	86,7702	115,2948
3	94,2114	117,3572	97,9560	117,3932	98,1342	117,4192	102,0504	116,7106
4	109,0031	113,2946	105,5988	115,3453	109,0031	113,2946	109,1428	113,2102
5	117,3556	100,1681	117,7616	96,2166	117,7334	96,0487	117,3585	92,0858
6	114,6329	84,8576	116,3758	88,4289	114,6329	84,8576	114,4909	84,7165
7	109,3372	78,9856	105,9734	76,8699	105,7520	76,8085	102,0395	75,3841
8	94,6353	74,6315	98,3825	74,6667	94,6353	74,6315	94,3868	74,6795
9	86,9990	76,6851	83,5916	78,7242	83,3770	78,8848	83,3830	113,2123
10	83,5916	78,7342	78,1930	84,5027	76,2544	103,8328	80,4336	81,5585
11	75,2455	91,8501	76,2227	103,5904	76,2227	103,5904	76,2549	103,8324

№ пп	Вариант 57		Вариант 58		Вариант 59		Вариант 60	
	Координаты		Координаты		Координаты		Координаты	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	90,4850	116,7121	98,2542	85,6762	90,4800	116,7071	74,8457	95,8040
2	105,7550	115,2911	86,7541	88,2701	105,7502	115,2864	86,6270	115,1584
3	114,4879	107,3720	81,6900	122,0878	114,4828	107,3671	94,2165	117,3624
4	116,2660	103,8159	99,8120	128,3877	116,2611	103,8110	109,0084	113,2998
5	114,4865	84,7159	110,6278	123,7251	114,4814	84,7108	117,3613	100,1732
6	112,0860	81,5494	109,3756	89,5480	112,0810	81,5443	114,6380	84,8627
7	90,4797	75,3898	107,3328	125,9413	90,4746	75,3847	109,3422	78,9907
8	80,4419	81,5640	98,2542	85,6762	80,4370	81,5592	94,6399	74,6366
9	75,1679	92,0995	95,8404	128,3877	75,1625	92,0944	87,0040	76,6902
10	76,2599	103,8352	94,2746	85,8209	76,2550	103,8301	83,5967	78,7393
11	86,7736	115,2911	94,2746	85,8209	86,7685	115,2860	75,2506	91,8552

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значение функции $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0080	0160	0239	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3900	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5468	5528	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266
1,8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2,0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9616	9625	9634
2,1	9643	9651	9660	9658	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9910	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9950	9952	9954	9955	9956	9958	9959	9960	9962
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	9973	9974	9975	9976	9976	9977	9978	9979	9979	9980
3,1	9981	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3,2	9986	9987	9987	9988	9988	9988	9989	9989	9990	9990
3,3	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,4	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995
3,5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,0	9999	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Квантили распределения Стьюдента

Таблица 2

K	q							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,30	636,61
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,48	3,77
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45	3,73
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,16	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,09	3,29

Таблица 3

Квантили распределения χ^2

K	q							
	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,548	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14

Продолжение прил. 3

Окончание табл. 3

K	q							
	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,82	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,91
120	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95

Квантили распределения λ (Колмогорова)

Таблица 6

λ	1-k(λ)	λ	1-k(λ)	λ	1-k(λ)	λ	1-k(λ)
0,30	1,000	0,65	0,792	1,00	0,270	1,70	0,0062
0,35	0,999	0,70	711	1,10	178	1,80	0032
0,40	997	0,75	627	1,20	112	1,90	0015
0,45	984	0,80	544	1,30	068	2,00	0007
0,50	964	0,85	465	1,40	040	2,10	0003
0,55	923	0,90	393	1,50	022	2,30	0001
0,60	864	0,95	328	1,60	012	2,50	0000

Продолжение прил. 3
Таблица 5

Квантили F -распределения

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
				При	$q=$	0,05				
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,06	5,91	5,77	6,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00
				При	$q=$	0,025				
1	64,78	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	956,7	976,7	997,2	1018,3
2	38,51	39,00	39,16	39,25	39,30	39,33	39,37	39,42	39,46	39,50
3	17,43	16,04	15,44	15,10	14,80	14,74	14,54	14,34	14,12	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,75	8,51	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,52	6,28	6,02
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,86	3,62	3,36	3,08
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,42	3,20	2,96	2,70	2,40
20	5,87	4,46	3,86	3,52	3,29	3,13	2,91	2,68	2,41	2,08
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,75	2,52	2,21	1,91
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,41	3,14	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,29	2,01	1,64
60	5,29	3,92	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,17	1,88	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,30	2,06	1,76	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	1,94	1,64	1,00
				При	$q=$	0,01				
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,60
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,42
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,45
5	16,26	13,27	12,05	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,47	9,02
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	3,91
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17

Окончание прил. 3

Окончание табл. 5

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	2,60
120	6,85	4,76	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	3,34	1,95	1,38
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,00
При $q=0,005$										
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23925	24426	24940	25465
2	198,5	199,0	199,2	199,3	199,34	199,3	199,4	199,4	199,5	199,5
3	55,55	49,80	47,47	46,20	45,39	44,84	44,13	43,39	42,62	41,88
4	31,33	26,28	24,26	23,16	22,46	21,98	21,35	20,70	20,03	19,32
5	22,78	18,31	16,53	15,56	14,94	14,51	13,96	13,38	12,78	12,14
10	12,83	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,12	5,66	5,17	4,64
15	10,80	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,67	4,25	3,79	3,26
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,09	3,68	3,22	2,69
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,78	3,37	2,92	2,38
30	9,18	6,36	5,24	4,62	4,23	3,95	3,58	3,18	2,73	2,18
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,35	2,95	2,50	1,93
60	8,50	5,80	4,73	4,14	3,76	3,49	3,13	2,74	2,29	1,69
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	2,93	2,54	2,09	1,43
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,74	2,36	1,90	1,00